Mall. p. 740 w

Die

Arithmetik und Algebra

in

aufgelösten und mit Erklärungen versehenen Aufgaben

zum Selbstunterricht

insbesondere

für angehende Forstmänner

von

Heinrich Pernitzsch

Königl. Sächs. Revierförster, Inhaber der Königl. Sächs. goldnen Civil-Verdienst-Medaille.

Bayer. Staatsministerium
f. Ernährung, Landwirtschaft u. Forsten
Ministerialforstabteilung
Bücherei
A a 1
1145
23

Leipzig,
in Commission in der Baumgärtnerschen Buchhandlung.

1823.

lyd 163/3162

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

Vorwort.

Die bereits vorhandenen Lehrbücher der Arithmetik noch mit einem neuen zu vermehren, lag nicht in meinem Plane, als ich mich zur Herausgabe der folgenden Blätter entschloß; sie sollen vielmehr dem jungen Forstmanne nur als eine Vorbereitung zum strengeren Studium der Arithmetik dienen, und enthalten daher nur Lehrsätze, Erklärungen und Uebungs-Aufgaben, welche letztere möglichst auf das Forstwesen angewandt sind.

Daß Werke dieser Art das Selbststudium nicht nur erleichtern, sondern das Trockne des arithmetischen Studiums überhaupt vermindern, bedarf wohl keines Beweises; sie sind aber auch für Diejenigen, die die Arithmetik erlernen, um solche bei ihren Dienstgeschäften anzuwenden — nicht um sie wieder vorzutragen — vollkommen genügend.

Von diesen Ansichten ausgehend, entwarf ich folgende Blätter und benutzte solche seit mehreren Jahren beim Vortrage der Arithmetik mit gutem Erfolge für meine Schüler. Dabei ergänzte ich denselben die mangelnden Beweise, in so weit nämlich ihr Scharfsinn solche zu fassen vermochte, was jedem Lehrer an einer Forstakademie, der dieses Werk bei seinem Vortrage als Leitfaden zu benutzen gedenkt, nicht schwer fallen wird, besonders da ich bei nicht leicht zu führenden Beweisen oft die Orte angegeben, wo solche in einem bekannten Lehrbuche zu finden sind, und mich überhaupt bemüht habe, den Vortrag so zu ordnen, daß dem Anfänger, bei einigem Nachdenken, die Selbstauffindung des Beweises minder schwer wird.

Ueber den Inhalt und die Ordnungsfolge der einzelnen Theile bemerke ich Folgendes.

Die Reduction algebraischer Gleichungen vom ersten Grade mit einer unbekannten Größe geht der Lehre von den Proportionen voraus, ohne (wie es doch eigentlich der Fall seyn sollte) auch algebraische Aufgaben darüber und Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen folgen zu lassen. Das erstere geschah, damit der Anfänger die Richtigkeit der bei den Proportionen statt findenden Sätze leicht einsehe, das letztere aber, weil ich durch mehrjährige Erfahrung überzeugt worden bin, daß der Selbstlernende weit leichter jeden Regeldetri-Ansatz macht — weil dies

nach festen Regeln geschieht — als zu einer nur etwas verwickelten Aufgabe die dazu gehörige Gleichung bildet; unabgesehen, daß in sehr vielen algebraischen Aufgaben Proportional-Ansätze vorkommen.

Unter den Regeldetri-Aufgaben kommen, um der größern Mannichfaltigkeit willen, auch solche vor, wo nur unter gewissen Bedingungen ein wirkliches Verhältniß statt finden kann; z. B. eine gewisse Menge Arbeiter arbeiten mit eben dem Fleiß, als derjenige war, der das Verhältniß begründete, u. dergl. Eben so kommen Aufgaben vor, wovon ähnliche Bedingungen enthaltende wiederum in der einfachen Interessenrechnung erscheinen; dies geschah, um den Anfänger darauf aufmerksam zu machen, daß letztere eigentlich nur eine Verbindung der Proportinallehre mit den Reductionsgesetzen algebraischer Gleichungen sey.

Die Reduction der Flächen- und Körpermaße folgt nicht nach der Reduction der Gewichte und Längenmaße, sondern erst im vierten Kapitel des achten Abschnittes, und zwar, um dem Anfänger sehr beschwerliche Multiplicationen und Divisionen durch Anwendung der Logarithmen zu ersparen.

Daß ich die Combinationslehre in ein Handbuch für Forstmänner aufgenommen habe, bedarf vielleicht einiger

Entschuldigung; dem denkenden Kopfe aber wird dieser interessante Theil der Arithmetik gewiß nicht unwillkommen seyn, unabgesehen, daß derselbe zu besserer Verständlichkeit des Folgenden wesentlich nöthig und wichtig war.

Die Lehre von der Reduction der höheren Gleichungen ist ziemlich umfassend abgehandelt, obgleich solche ebenfalls beim Forsthaushalte wenig Anwendung finden dürfte. Ich fand dies jedoch für nöthig, theils weil gerade durch sie der Scharfsinn des Lernenden am meisten beschäftigt und geübt wird, theils weil sie wirklich noch zu den unangebautesten Feldern der Algebra gehört, so daß es eines jeden Lehrers Pflicht ist, den Anfänger auf mögliche Entdeckungen in diesem Gebiete aufmerksam zu machen und dazu anzureizen.

Zum Schluß bemerke ich noch, daß ich bei der Ausarbeitung dieser Blätter folgende Werke benutzt habe:

Vega's Vorlesungen über die Mathematik.
Lacroix Anfangsgründe der Algebra.
Eulers vollständige Anleitung zur Algebra.
Meier Hirsch, Sammlung von Aufgaben und Formeln aus der Buchstabenrechenkunst und Algebra.

Forsthaus Heidelbach bei Wolkenstein, im März 1823.

der Verfasser.

Inhalt.

Einleitung. . . . . S. 1 — 3.

Erster Abschnitt. Die Rechnungsarten mit Brüchen. §. 1 — 20. . . . . S. 4 — 34.

Erstes Kapitel. Von den gemeinen Brüchen. §. 1—8. S. 4 — 16.

Zweites Kap. Von den Decimalbrüchen. §. 9—15. S. 17 — 28.

Drittes Kap. Von den zusammenhängenden oder Kettenbrüchen. §. 16 — 20. . . . . S. 29 — 34.

Zweiter Abschnitt. Buchstabenrechenkunst. §. 21 — 41. . . . . S. 35 — 93.

Erstes Kap. Allgemeine Erklärungen. §. 21—27. S. 35 — 42.

Zweites Kap. Die vier Rechnungsarten mit Buchstaben. §. 28 — 31. . . . . S. 43 — 54.

Drittes Kap. Rechnungen mit algebraischen gebrochenen Größen. §. 32 — 38. . . . . S. 55 — 83.

Viertes Kap. Auflösung algebraischer Gleichungen vom ersten Grade mit einer unbekannten Größe. §. 39 — 41. . . . . S. 84 — 93.

Dritter Abschnitt. Von den Verhältnissen und Proportionen. §. 42 — 59. S. 94 — 148.

Erstes Kap. Allgemeine Erklärungen. §. 42 — 44. S. 94 — 98.

Zweites Kap. Von den arithmetischen Proportionen. §. 45 — 46. . . . . S. 98 — 101.

Drittes Kap. Von den geometrischen Proportionen. §. 47 — 51. . . . . S. 101 — 106.

A) Aufgaben über die einfache gerade Regeldetri. §. 52. . . . . S. 106.

B) Aufgaben über die einfache verkehrte Regeldetri. §. 53. . . . . S. 112.

C) Aufgaben über die zusammengesetzte Regeldetri. §. 54 — 55. . . . . S. 116 — 132.

D) Aufgaben über die Reduction der Gewichte, Gelder und Längenmaße. §. 56. . . . S. 133.

Viertes Kap. Einfache und zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung. §. 57 — 59. . . . S. 137 — 148.

Vierter Abschnitt. Algebraische Aufgaben des ersten Grades, mit einer und mit mehreren unbekannten Größen. §. 60—66. S. 149 — 188.

Erstes Kap. Allgemeine Erklärungen. §. 60—61. S. 149 — 151.

Zweites Kap. Algebraische Aufgaben mit einer unbekannten Größe. §. 62. . . . . S. 151.

Drittes Kap. Gleichungen und Aufgaben mit zwei und mehreren unbekannt. Größen. §. 62—66. S. 151 — 188.

Fünfter Abschnitt. Rechnungen mit Exponential- und Wurzelgrößen, Gleichungen u. algebraische Aufgaben des zweiten Grades. §. 67 — 97. . . . . S. 189 — 250.

Erstes Kap. Allgemeine Erklärungen. §. 67 — 70. S. 189 — 193.

Zweites Kap. Ausziehung der Quadratwurzel. §. 71 — 76. . . . . S. 193 — 204.

A) aus Buchstaben. §. 71 — 72. . . . . S. 193 — 198.
B) aus Zahlen. §. 73 — 76. . . . . S. 198 — 204.

Drittes Kap. Ausziehung der Cubikwurzel. §. 77—82. S. 204—212.

A) aus Buchstaben. §. 77 — 78. . . . . S. 204 — 208.
B) aus Zahlen. §. 79 — 80. . . . . S. 208 — 212.

Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel durch Näherung. §. 81. . . . . S. 212.

Ausziehung der Wurzel aus Potenzen, deren Exponent ein Product der Zwei od. Drei. §. 82. S. 213

Viertes Kap. Rechnungsarten mit Wurzelgrößen. §. 83 — 88. . . . . S. 214 — 223.

Ausziehung der Quadratwurzel aus einem Binom von der Form $A \pm \sqrt{B}$. §. 88. . . S. 221.

Fünftes Kap. Algebraische Gleichungen des zweiten Grades. §. 89 — 94. . . . . S. 223 — 235.

Sechstes Kap. Algebraische Aufgaben, die auf Gleichungen vom 2ten Grade führen. §. 95—96. S. 236 — 250.

Die Zahl Pflanzen zu bestimmen, die auf eine gewisse Fläche gehen. §. 97. . . . . S. 248.

Sechster Abschnitt. Combinationslehre. §. 98 — 109. . . . . S. 251 — 284.

Erstes Kap. Allgemeine Erklärungen. §. 98 — 103. S. 251 — 258.

A) Von den Combinationen. §. 99 — 100. . . . S. 252.
B) Von den Permutationen. §. 101 — 102. . . . S. 254.
C) Von den Variationen. §. 103. . . . . S. 257.

Zweites Kap. Darstellung der Combinationen, Permutationen und Variationen. §. 104 — 106. S. 258 — 277.

Drittes Kap. Aufgaben über die Combinationslehre. §. 107 — 109. . . . . S. 277 — 284.

Siebenter Abschnitt. Der binomische und polynomische Lehrsatz. §. 110—117. S. 285—298.

Erstes Kap. Erklärungen und Formeln. §. 110—112. S. 285—289.

Zweites Kap. Aufgaben über den binomischen und polynomischen Lehrsatz. §. 113 — 114. . S. 289 — 291.

Drittes Kap. Anwendung des binom. u. polynom. Lehrsatzes bei Ausziehung d. Wurzeln. §. 115—117. S. 291—298.

Achter Abschnitt. Arithmetische und geometrische Progressionen und Logarithmen.
§. 118 — 136. . . . . S. 299 — 332.

Erstes Kap. Arithmetische Reihen. §. 119—123. S. 300—312.

Zweites Kap. Geometrische Reihen. §. 124—126. S. 312—316.

Drittes Kap. Von den Logarithmen. §. 127—133. S. 317—324.

Viertes Kap. Anwendung der Logarithmen bei verschiedenen Rechnungsarten. §. 134—136. S. 324—332.

Neunter Abschnitt. Einfache und zusammengesetzte Interessenrechnung und deren Anwendung bei Bestimmung des Waldwerthes. §. 137 — 142. . . . S. 333 — 357.

Erstes Kap. Einfache Interessenrechnung. §. 138—139. S. 333—344.

Zweites Kap. Zusammengesetzte Interessenrechnung.
§. 140 — 141. . . . . S. 344 — 352.

Drittes Kap. Anwendung der einfachen und zusammengesetzten Interessenrechnung bei der Waldwerthberechnung. §. 142—143. . . . S. 335 — 357.

Zehnter Abschnitt. Auflösung der höheren Gleichungen. §. 144 — 168. S. 358 — 400.

Erstes Kap. Allgemeine Eigenschaften der höhern Gleichungen §. 144 — 152. . . . . S. 358 — 366.

Zweites Kap. Auflösung höherer Gleichungen mittelst des Aufsuchens ihrer rationalen Wurzeln.
§. 153 — 155. . . . . S. 366 — 372.

Drittes Kap. Auflösung der höhern Gleichungen nach Formeln. §. 156 — 159. . . . . S. 372 — 379.

Viertes Kap. Auflösung der höhern Gleichungen mittelst des Aufsuchens ihrer incommensurabeln Wurzeln durch Näherung. §. 160—164. S. 379 — 386

Fünftes Kap. Auflösung der höhern Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen. §. 165—166. S. 386—388.

Sechstes Kap. Algebraische Aufgaben die auf höhere Gleichungen führen. §. 167 — 168. . S. 388 — 400.

Eilfter Abschnitt. Unbestimmte Analytik.
§. 169 — 174. . . . . S. 401 — 420.

Erstes Kap. Erklärungeu. §. 169 — 170. . . S. 401 — 403.

Zweites Kap. Einfache diophantische Aufgaben.
§. 171 — 173. . . . . S. 403 — 414.

Drittes Kap. Zusammengesetzte diophantische Aufgaben. §. 174. . . . . S. 414 — 420.

Druckfehler,

welche vor dem Gebrauche des Buches zu verbessern sind:

Seite 5, Zeile 3 von oben, lies: des Nenners 9 in den Zähler 56
— 14, Z. 3 von unten, l. $\frac{4}{1}$ st. $\frac{1}{4}$
— 60, Z. 4 von unten, muß hinter = noch $\frac{4acd-12b^2+3a^2}{3bcd}$ folgen
— 62, Z. 8 von unten, l. $\frac{3a}{2b}$ st. $\frac{3b}{2b}$
— 70, Z. 1 von oben, l. $\frac{15a^2}{2}$ st. $\frac{15a^3}{2}$
— 100, Z. 13 von oben, ist derselben zu streichen
— 107, Z. 13 von oben, l. unbekannte st. bekannte
— 134, Z. 13 von unten, l. 125 st. 135
— 136, Z. 5 von unten, l. 20799 st. 30799
— 136, Z. 2 von unten, l. $599\frac{137}{347}$ st. $599\frac{137}{599}$
— 142, Z. 14 von unten, l. 420 st. 400
— 147, Z. 14 von unten, l. $9\frac{1}{3}$ st. 7 und $7\frac{1}{2}$ st. 5
— 158, Z. 7 von oben, ist von zu streichen
— 171, Z. 6 von unten, l. $4y+\frac{4x}{5}+6$ st. $+4y\frac{4x}{2}+6$
— 175, Z. 3 von oben, folgt hinter $\frac{8}{x}$ noch $+\frac{3}{16}$
— 179, Z. 13 von unten, fällt y hinter $1312\frac{1}{2}$ weg und folgt erst hinter und
— 219, Z. 2 von oben, l. $=2\sqrt[6]{32}$ statt $2\sqrt[6]{64}$
— 222, Z. 6 von unten, l. $\sqrt{3}+\sqrt{\frac{1}{2}}$ st. $\sqrt{3}-\frac{1}{4}$
— 223, Z. 7 von oben, l. $1+\sqrt{(a-1)}$ st. $2\sqrt{a-1}$
— 225, Z. 2 von unten, muß in dem Werthe für y, $20b^2c$ st. $6b^2c$ gesetzt werden
— 230, Z. 6 von unten, muß stehen $y=\pm(c-a)\sqrt{\frac{d}{b(bg-ce+ae)}}$
— 231, in der 8. Aufgabe muß der Werth von x durch 2 dividirt werden
— 252, Z. 5 von oben, l. Hindenburg st. Hindenberg
— 267, Z. 7 von unten, l. der dritten st. der zweiten
— 290, Z. 11 von oben, l. $4^4a^43^3b^3$ st. $4^4a^43^3b^4$
— 290, Z. 18 von oben, l. 537824 st. 537827
— 290, Z. 19 von oben, l. 1419857 st. 1419859
— 290, Z. 2 von unten, l. $\frac{5a^3b^3c^2d^3}{2}+\frac{5a^2b^2c^6d^4}{12}$ st. $\frac{5a^2b^2c^3d^3}{2}+\frac{5a^3b^3c^6d^4}{12}$
— 294, Z. 14 von unten, l. des vorigen st. vorigen des
— 300, Z. 5 von unten, l. oder die st. die oder
— 304, Z. 12 von oben, l. qn^{m-1} st. q^{m-1}
— 323, Z. 7 von oben, l. man bei ihr st. man ihr
— 326, Z. 9 von unten, l. 42,79419 st. 24,79419
— 334, Z. 16 von unten, l. werden st. wird
— 363, Z. 14 von unten, l. kleinere st. größere.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Einleitung.

Derjenige Theil der reinen Mathematik, welcher unter dem Namen der Arithmetik bekannt ist, wird gewöhnlich in die gemeine und allgemeine Arithmetik eingetheilt.

Die gemeine Arithmetik (Arithmetik im engeren Sinne) umfaßt die Rechnungsarten, welche durch alleinige Anwendung der gewöhnlichen arabischen Ziffern aufgelöst werden können.

Die allgemeine Arithmetik, bekannter unter dem Namen Algebra, begnügt sich nicht mit den gewöhnlichen Zahlzeichen, sondern bedient sich bei der Auflösung ihrer Aufgaben weit allgemeinerer Zeichen zur Bezeichnung der Größen, nämlich der Buchstaben des kleineren lateinischen oder griechischen Alphabets.

Die Algebra — unter welcher Benennung wir in der Folge stets die allgemeine Arithmetik verstehen — wird wieder eingetheilt:

1) in die Buchstabenrechenkunst, die bei der Algebra das ist, was die Rechnungsarten mit unbenannten Zahlen bei der gemeinen Arithmetik;
2) in die niedere und
3) in die höhere Algebra.

Die Gränzen der letzteren beiden sind noch schwankend.

Das arabische Wort Algebra, gleichbedeutend mit dem griechischen Worte Analysis, bedeutet so viel als Auflösung; jedoch braucht man letzteres vorzüglich für die höhere Algebra und unterscheidet bei derselben noch die Analysis des Endlichen von der Analysis des Unendlichen. Jene bestimmt nämlich, so wie die niedere Algebra, aus gegebenen endlichen Größen andere noch unbekannte, durch Vergleichungen, die zwischen den bekannten Eigenschaften der letzteren und den bekannten Größen angestellt werden können; diese entwickelt durch Anwendung der Differential- und Integralrechnung aus bekannten, unendlich kleinen Größen andere endliche noch unbekannte.

Die sowohl bei der gemeinen, als allgemeinen Arithmetik üblichen Zeichen sind folgende:

$=$, das Zeichen der Gleichheit, zeigt, zwischen zwei Größen stehend, die vollkommene Gleichheit derselben an und wird ausgesprochen: ist gleich; also $4 = 4$.

$\lessgtr$, das Zeichen der Ungleichheit, und zwar heißt $3 < 4$: 3 ist kleiner als 4; $7 > 5$ heißt: 7 ist größer als 5, und $12 \lessgtr 11$ heißt: 12 ist nicht gleich 11.

$+$, das Zeichen der Addition und zugleich das positive in der Buchstabenrechenkunst. Es wird ausgesprochen: plus, oder mehr; also $5 + 4 = 9$ heißt: 4 zu 5 addirt (4 mehr 5) ist gleich 9.

$-$, das Zeichen der Subtraction und das negative in der Buchstabenrechenkunst wird ausgesprochen: minus, oder weniger; also $9 - 4 = 5$ heißt: 9 weniger 4 ist gleich 5.

$\times$ oder $.$, die Zeichen der Multiplication; also $4 \times 6 = 4 . 6 = 24$, d. h. 4 multiplicirt mit 6 ist gleich 24. In der Buchstabenrechenkunst werden die zu multiplicirenden

Größen gewöhnlich ohne alle Zeichen an einander gesetzt; z. B. $a \times b = ab$, oder $3 \times a \times c = 3ac$.

:, das Zeichen der Division, oder ein liegender Strich, über welchen der Dividend und unter welchen der Divisor gesetzt wird; also $16 : 4 = \frac{16}{4} = 4$ und $7 : 2 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$.

Das Resultat der Addition heißt Summe; das der Subtraction Unterschied; das der Multiplication Product und das der Division Quotient.

Die einzelnen Größen, welche mit einander multiplicirt werden sollen, heißen Factoren.

Enthält eine Zahl außer der Einheit sonst keinen Factor, d. h. läßt sich dieselbe außer der Einheit nur durch sich selbst dividiren, so heißt dies eine Primzahl; so sind z. B. 1, 3, 5, 7, 17, 29, 31, 163 ꝛc. Primzahlen.

Wird die Division durch einen liegenden Strich angezeigt, so wird die unterhalb dieses Striches stehende Größe der Nenner, die oberhalb des Striches stehende hingegen der Zähler genannt; stehet aber zwischen beiden Größen das Divisionszeichen (:), so heißt die hintere der Divisor, die vordere der Dividend. Divisor und Nenner, so wie Dividend und Zähler sind also in so fern gleichbedeutend, als letztere Benennung vorzüglich bei Brüchen gebräuchlich ist.

Erster Abschnitt.

Die Rechnungsarten mit Brüchen.

Erstes Kapitel.

Von den gemeinen Brüchen.

§. 1.

Ein Bruch entstehet, wenn eine kleinere Zahl — der Zähler — durch eine größere — den Nenner — dividirt werden soll, oder wenn bei der Division einer größeren Zahl durch eine kleinere am Ende ein Rest bleibt, welcher als Zähler mit dem Divisor als Nenner in Form eines Bruches gesetzt, dem Quotienten angehangen wird; z. B. $2 : 3 = \frac{2}{3}$ oder $\frac{56}{9} = 6\frac{2}{9}$. Jeder Bruch zeigt also (s. Einleitung) eine Division an.

Anmerk. Man erklärt die Entstehung eines Bruches auch also: Wenn eine Größe in mehrere gleiche Theile getheilt wird und man nimmt nur einige von diesen Theilen, so sind diese im Verhältniß zu der getheilten Größe ein Bruch, dessen Zähler die Anzahl der genommenen Theile, der Nenner aber die Zahl der Theile, in welcher die Größe zerlegt ward, angibt. Würde z. B. ein Thaler in vier gleiche Theile getheilt gedacht und man nähme hiervon 3, so wäre $3/4$ der dadurch erhaltene Bruch.

Der Bruch $\frac{2}{3}$ ist ein ächter Bruch, weil sein Zähler kleiner als sein Nenner. Der Bruch $\frac{56}{9}$ ist ein unächter Bruch,

weil in seinem Zähler noch Ganze (6) enthalten sind. Der Bruch $6\frac{2}{9}$ heißt ein mit Ganzen vermischter Bruch. Er ist durch Division des Zählers 9 in den Nenner 56 und Anhängung des bei dieser Division bleibenden Restes 2 (als den Zähler), dividirt durch den Nenner 9, entstanden, und wird wieder zu einem unächten Bruch — er wird eingerichtet — wenn man die Ganzen — hier 6 — mit dem Nenner des angehängten Bruches multiplicirt und hierzu dessen Zähler (2) addirt, unter die erhaltene Summe (56) aber den Nenner setzt; es ist nämlich $6\frac{2}{9} = \frac{6\times9+2}{9} = \frac{54+2}{9} = \frac{56}{9}$.

§. 2.

Dem Werthe nach wird ein Bruch größer, wenn sein Zähler vergrößert, und kleiner, wenn sein Nenner vergrößert wird. Wird z. B. bei dem Bruch $\frac{2}{5}$ erst der Zähler mit 2 multiplicirt, so ist $\frac{2\times2}{5} = \frac{4}{5} > \frac{2}{5}$; wird aber der Nenner 5 mit 2 multiplicirt, so ist $\frac{2}{2\times5} = \frac{2}{10} < \frac{2}{5}$. Multiplicirt man den Nenner und Zähler mit einer gleichen Zahl, so verändert sich deßhalb der Werth eines Bruches nicht; denn es ist $\frac{2}{5} \times \frac{2}{2} = \frac{2\times2}{5\times2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

Ein ächter Bruch kommt der Einheit immer näher, je mehr sich sein Zähler vergrößert und der Unterschied zwischen Zähler und Nenner immer kleiner wird; so nähern sich z. B. folgende Brüche immer mehr und mehr der Einheit: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{31}{32}$, $\frac{63}{64}$, $\frac{127}{128}$.

§. 3.

Brüche auf gleiche Benennung bringen, heißt soviel als selbigen einerlei Nenner geben, ohne daß sie etwas an ihrem Werthe verlieren. Dabei verfährt man nach folgenden Regeln.

1) Man setze alle Nenner der gegebenen Brüche in eine Reihe;

2) durchstreiche die kleineren Nenner, die in den größeren ohne Rest aufgehen, so wie auch von denen, welche mehrmals vorhanden, alle bis auf einen.

3) Man suche eine Zahl, womit sich wenigstens 2 der undurchstrichenen Nenner ohne Rest theilen lassen, dividire dieselben durch diese Zahl und setze die erhaltenen Quotienten, so wie die Nenner, die sich nicht dividiren lassen, unter einen horizontal gezogenen Strich, die Zahl aber, womit man theilte, in eine Klammer vor dem Strich.

4) Hierauf untersuche man nochmals, ob keiner der erhaltenen Quotienten in einem der ungetheilt herabgesetzten Nenner ohne Rest dividirt, streiche im Bejahungsfalle den ersteren aus und suche abermals eine Zahl, mit der sich wenigstens zwei der herabgesetzten Nenner ohne Rest theilen lassen.

5) Ist man durch Anwendung der unter 3 und 4 gegebenen Regeln so weit gekommen, daß die unter dem Strich stehenden Zahlen unter sich lauter Primzahlen sind, so multiplicire man selbige mit einander und dieses Product wiederum mit den in den Klammern stehenden Zahlen. Dadurch erhält man den möglichst kleinsten Generalnenner, d. h. eine solche Zahl, in welcher die Nenner aller gegebenen Brüche ohne Rest aufgehen.

6) Nun dividire man mit jedem einzelnen Nenner in den Generalnenner und multiplicire den erhaltenen Quotienten mit dem zu jenem Nenner gehörigen Zähler, so erhält man in dem Producte den Zähler eines Bruches, der den Generalnenner zum Nenner und mit dem gegebenen Bruche gleichen Werth hat.

1te Aufgabe. Die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ sind auf gleiche Benennung zu bringen.

Auflösung:

Die Nenner sind: 3 4 9 8 12 6 15 3 4 (1te u. 2te Regel).

(4) 9 2 3 15 (3te u. 4te Regel).

(3) 3 2 5 (desgl.)

$3 \times 2 \times 5 \times 3 \times 4 = 360$ (5te Regel).

Der Bruch $\frac{2}{3}$ wird zu 360 : 3 = 120 u. $\frac{120 \times 2}{360} = \frac{240}{360}$

" " $\frac{3}{4}$ " " 360 : 4 = 90 " $\frac{90 \times 3}{360} = \frac{270}{360}$

" " $\frac{5}{9}$ " " 360 : 9 = 40 " $\frac{40 \times 5}{360} = \frac{200}{360}$

" " $\frac{7}{8}$ " " 360 : 8 = 45 " $\frac{45 \times 7}{360} = \frac{315}{360}$

" " $\frac{5}{12}$ " " 360 : 12 = 30 " $\frac{30 \times 5}{360} = \frac{150}{360}$

" " $\frac{5}{6}$ " " 360 : 6 = 60 " $\frac{60 \times 5}{360} = \frac{300}{360}$

" " $\frac{4}{15}$ " " 360 : 15 = 24 " $\frac{24 \times 4}{360} = \frac{96}{360}$

" " $\frac{1}{3}$ " " 360 : 3 = 120 " $\frac{120 \times 1}{360} = \frac{120}{360}$

" " $\frac{1}{4}$ " " 360 : 4 = 90 " $\frac{90 \times 1}{360} = \frac{90}{360}$

} 4te Regel.

2te Aufgabe. Die Brüche $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{5}$ sind auf gleiche Benennung zu bringen.

Aufl. Sie sind: $\frac{288}{720}$, $\frac{480}{720}$, $\frac{540}{720}$, $\frac{400}{720}$, $\frac{270}{720}$, $\frac{315}{720}$, $\frac{300}{720}$, $\frac{504}{720}$, $\frac{600}{720}$ und $\frac{432}{720}$.

§. 4.

Addition und Subtraction der Brüche.

Sind einmal die Brüche auf gleiche Nenner gebracht, so ist die Addition und Subtraction derselben sehr leicht; es dürfen sodann nur sämmtliche Zähler, gleich als ob es ganze Zahlen wä-

ren, addirt, oder der Zähler des abzuziehenden Bruches subtrahirt werden. Die Summe aller Zähler bei der Addition und der Unterschied der Zähler bei der Subtraction erhält sodann den Generalnenner zum Nenner.

Um bei beiden Rechnungsarten, die unter 6 im §. 3 gegebene Regel leichter auszuführen, ist es gut, wenn man die Brüche unter einander setzt, hinter denselben zwei senkrechte Striche ziehet und in die dadurch entstandene Spalte die Quotienten schreibt, die durch Division der Nenner in den Generalnenner erhalten worden. Hinter dem zweiten der gezogenen Striche kommen sodann die Producte aus den Zählern der Brüche in die Quotienten, nämlich die neuen Zähler der zu addirenden oder von einander abzuziehenden Brüche.

Sind Ganze bei den Brüchen, so werden durch Division des Generalnenners in die Summe aller Zähler auch aus letzterer die Ganzen ausgezogen, zu den schon vorhandenen Ganzen addirt und der bei dieser Division noch bleibende Bruch der Summe angehangen.

Ist bei der Subtraction der obere Bruch kleiner als der untere, so wird von den vorhandenen Ganzen eine Einheit geborgt, in Theile des Generalnenners verwandelt, zu dem Zähler des, vorher auf gleiche Benennung gebrachten oberen Bruches addirt und dann wie gewöhnlich verfahren.

1te Aufgabe. Die Brüche $2\frac{3}{4}$, $4\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{8}$, $4\frac{5}{6}$, $2\frac{7}{9}$, $4\frac{7}{12}$ sind zu addiren.

72 Aufl.

$2\frac{3}{4}$	18	54
$4\frac{1}{2}$	36	36
$3\frac{1}{8}$	9	9
$4\frac{5}{6}$	12	60
$2\frac{7}{9}$	8	56
$4\frac{7}{12}$	6	42
$22\frac{4}{7\,2}$	Summe	$2\frac{5}{7}\frac{7}{2} = 3\frac{4}{7}\frac{1}{2}$.

4 2 8 6 9 12

3) 8 3 4

$8 \times 3 \times 3 = 72 =$ dem Generaln.

2te Aufgabe. Von $5\frac{1}{8}$ sollen abgezogen werden $3\frac{5}{6}$.

Aufl.

$$\begin{array}{r|l} 8 & 6 \\ \hline 4 & 3 \end{array}\ 2)$$

$4 \times 3 \times 2 = 24 =$ dem Generaln.

$$\begin{array}{r|l|l} 5\frac{1}{8} & \overbrace{3}^{24} & 3 + 24 = 27 \\ 3\frac{5}{6} & 4 & 20 \\ \hline 1\frac{7}{24} & \text{Unterschied.} & \frac{7}{24} \end{array}$$

3te Aufgabe. Wieviel machen $4\frac{3}{4}$, $5\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $2\frac{5}{6}$, $4\frac{5}{9}$, 2 und $3\frac{1}{3}$ Klftr. zusammen Klaftern aus?

Antw. $23\frac{43}{72}$ Klftr.

4te Aufgabe. Auf einem Gehau standen $74\frac{1}{4}$ Klftr. Scheite, davon wurden zu 3 verschiedenen Malen, erst $5\frac{1}{2}$, dann $4\frac{1}{8}$, dann $7\frac{1}{4}$ Klftr. abgegeben; wieviel Klaftern blieben noch stehen?

Antw. Die 3 Abgabeposten addirt und von $74\frac{1}{4}$ Klftr. abgezogen, bleiben $57\frac{3}{8}$ Klftr.

5te Aufgabe. Ein Deputatist erhielt auf sein ihm abzureichendes Scheitholzquantum von 75 Klftrn. nach und nach $4\frac{1}{4}$, $6\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{8}$, $7\frac{1}{4}$ und $5\frac{1}{4}$ Klftr.; wieviel muß derselbe noch zur Erfüllung bekommen?

Antw. $48\frac{3}{8}$ Klftr.

§. 5.

Einen Bruch aufheben heißt soviel als einen andern Bruch finden, der dem ersteren am Werthe gleich ist, aber durch kleinere Zahlen ausgedrückt wird; z. B. $\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Um einen Bruch aufheben zu können, müssen die gemeinschaftlichen Factoren seines Zählers und Nenners aufgesucht werden; denn das Aufheben ist nichts anders, als eine Division mit einer gleichen Zahl (dem gemeinschaftlichen Factor) in Zähler und Nenner; in obigem Beispiel war diese die 2.

Die einfachen gemeinschaftlichen Factoren des Zählers und Nenners entdeckt man leicht durch Anwendung folgender Regeln.

Es heben sich nämlich:

1) mit der 2 alle Brüche, wo die letzte Zahl (die Einer) im Zähler und Nenner eine gerade Zahl ist; z. B. $\frac{4}{6}$, $\frac{438}{6}$, $\frac{178}{298}$ u. s. w.

2) mit der 3 alle Brüche, wo die Summe der einzelnen Ziffern des Zählers und die des Nenners, jede für sich, ein Product der 3 bildet, oder sich durch 3 ohne Rest theilen läßt; z. B. $\frac{3}{6}$, $\frac{51}{69}$, $\frac{525}{12}$.

3) mit der 4 alle Brüche, bei denen die letzten beiden Ziffern (die Einer und Zehner) in Zähler und Nenner sich mit 4 ohne Rest theilen lassen; z. B. $\frac{4}{8}$, $\frac{20}{36}$, $\frac{3244}{16}$ u. s. w.

4) mit der 5 alle Brüche, wo die letzte Ziffer (die Einer) im Zähler und Nenner eine 5 oder 0 ist; z. B. $\frac{5}{15}$, $\frac{65}{75}$, $\frac{105}{380}$.

5) mit der 6 alle Brüche, wie solche unter 3 angegeben, die Einer dabei aber gerade Zahlen sind; z. B. $\frac{6}{18}$, $\frac{30}{54}$, $\frac{360}{462}$.

6) mit der 7 alle Brüche, wenn sich die Summe des Zählers und Nenners durch 7 ohne Rest theilen läßt; z. B. $\frac{63}{91}$, $\frac{343}{392}$ u. s. w.; denn $\frac{63+91}{7} = \frac{154}{7} = 22$.

7) mit der 8 alle Brüche, bei denen die drei letzten Ziffern (die Einer, Zehner und Hunderte) im Zähler und Nenner sich durch 8 ohne Rest theilen lassen; z. B. $\frac{1248}{3168}$, $\frac{4736}{5242}$ u. s. w.

8) mit der 9 alle Brüche, wo die Summe der einzelnen Ziffern des Zählers und Nenners, jede für sich, ein Product der 9 bildet; z. B. $\frac{234}{3153}$, $\frac{621}{7119}$ u. s. w.

9) mit der 11 alle Brüche, wo, wenn im Zähler und Nenner, bei jedem für sich, eine Ziffer von der andern abgezogen wird, zuletzt kein Rest bleibt; z. B. $\frac{11}{22}$, $\frac{121}{352}$, $\frac{462}{792}$, $\frac{5489}{6710}$.

10) Bestehen die letzten Ziffern im Zähler und Nenner aus Nullen, so können bei beiden gleichviel weggestrichen werden; z. B. $\frac{4800}{6700}$, $\frac{350}{4700}$, $\frac{700}{970}$ u. s. w.

§. 6.

Den größten gemeinschaftlichen Theiler, oder die größte Zahl, womit sich ein Bruch aufheben läßt, findet man durch folgendes Verfahren. Man dividire den Nenner durch den Zähler; geht die Division ohne Rest auf, so ist der Zähler selbst das größte gemeinschaftliche Maß. Ist dies nicht der Fall, sondern bleibt ein Rest, so dividire man mit diesem Reste in den vorherigen Divisor (den Zähler). Bleibt abermals ein Rest, so dividire man wiederum mit diesem Reste den vorherigen Divisor (den ersten Rest) und fahre mit dieser Division, wo allemal der vorherige Divisor durch den gebliebenen Rest dividirt wird, so lange fort, bis einmal kein Rest bei der Division übrig bleibt. Derjenige Divisor, mit dem zuletzt die Division ohne Rest verrichtet wurde, ist der größte gemeinschaftliche Theiler des Bruches, oder bei zwei gegebenen Zahlen ihr größtes gemeinschaftliches Maß.

1ste Aufgabe. Welches ist der größte Theiler von $\frac{357}{680}$?

Aufl. $680 : 357 = 1$ und 323 Rest
$357 : 323 = 1$ und 34 Rest
$323 : 34 = 9$ und 17 Rest
$34 : 17 = 2$ und 0 Rest

Also ist 17 der größte gemeinschaftliche Theiler.

2te Aufgabe. Der größte gemeinschaftliche Theiler von $\frac{1155}{1536}$ ist?

Aufl. $1536 : 1155 = 1$ und 381 Rest
$1155 : 381 = 3$ und 12 Rest
$381 : 12 = 31$ und 9 Rest
$12 : 9 = 1$ und 3 Rest
$9 : 3 = 3$ und 0 Rest.

Also ist 3 der größte Theiler.

3te Aufgabe. Das größte gemeinschaftliche Maß der beiden Zahlen 2347 und 3151 ist?

Aufl. 3151 : 2347 = 1 und 804 Rest
2347 : 804 = 2 und 739 Rest
804 : 739 = 1 und 65 Rest
739 : 65 = 11 und 24 Rest
65 : 24 = 2 und 17 Rest
24 : 17 = 1 und 7 Rest
17 : 7 = 2 und 3 Rest
7 : 3 = 2 und 1 Rest
3 : 1 = 3 und 0 Rest.

Das größte gemeinschaftliche Maß ist also 1; die beiden Zahlen sind nämlich Primzahlen unter sich.

§. 7.

Man findet alle Factoren, welche eine größere Zahl, z. B. die Zahl 360 enthält, durch folgendes Verfahren.

Man dividire diese Zahl durch den kleinsten in ihr enthaltenen Factor (hier 2) und setze diesen Factor rechts eines hinter der Zahl gezogenen senkrechten Striches, den Quotienten (hier 180) aber unter die gegebene Zahl. Mit diesem Quotienten verfahre man auf dieselbe Art, so erhält man hier zum kleinsten Factor wieder 2 und 90 zum Quotienten. Den Factor 2 schreibe man unter die schon vorhandene 2, multiplicire beide mit einander und schreibe das Product 4 hinter die zweite 2, den Quotienten 90 aber setze man unter den vorherigen Quotienten (180). Diese 90 wird wiederum mit dem kleinsten in ihr enthaltenen Factor (2) dividirt und der Quotient 45 darunter, der Factor 2 aber dahinter geschrieben; mit dem letzten Factor (2) multiplicire man alle bereits gefundene (wenn deren jedoch 2 oder mehrere gleiche vorhanden sind, wie hier z. B. die 2, so multiplicire man davon nur einen) und schreibe sie hinter einander. Dieses Verfahren setze man so lange fort, bis man eine Primzahl erhält, die nur durch sich selbst dividirt, 1 zum Quotienten gibt, so hat man in den Factoren, die längs gleich hinter dem Striche herabste-

hen (hier 2, 2, 2, 3, 3, 5), alle einfache und in den übrigen hinter dem Striche die zusammengesetzten Factoren (hier 4, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180 und 360). Die hier folgende Ausführung wird das Gesagte mehr versinnlichen.

360	2											
180	2	4										
90	2	4	8									
45	3	6	12	24								
15	3	6	9	12	18	24	36	72				
5	5	10	15	20	30	40	45	60	90	120	180	360

2te Aufgabe. Welches sind die einfachen und welches die zusammengesetzten Factoren der Zahl 2310?

Antw. Die einfachen sind: 2, 3, 5, 7 und 11; die zusammengesetzten: 6, 10, 14, 15, 21, 22, 30, 33, 35, 42, 55, 66, 70, 77, 105, 110, 154, 165, 210, 231, 330, 385, 462, 770, 1155 und 2310.

§. 8.

Multiplication und Division der Brüche.

Um zwei oder mehrere Brüche mit einander zu multiplici-ren, verfahre man nach folgenden Regeln.

1) Man richte die mit Ganzen versehenen Brüche ein, d. h. man mache nach §. 1 die mit Ganzen vermischten Brüche zu unächten; sind Ganze ohne angehängten Bruch gegeben, so gebe man denselben 1 zum Nenner.

2) Suche man, ob sich irgend ein Zähler und Nenner mit einer gemeinschaftlichen Zahl ohne Rest theilen lasse und dividire mit dieser Zahl beide, indem man an die Stelle derselben die erhaltenen Quotienten setzt.

3) Wenn sich nichts mehr heben (dividiren) läßt, so multipli-cire man sowohl die Nenner, als auch die Zähler unter einander, und dividire das Product der Zähler durch das der Nenner; im Fall das erstere größer ist, wird diese Di-

vision wirklich gemacht, um die in dem Producte steckenden Ganzen zu erhalten, im Gegentheil aber ist das Product ein ächter Bruch.

4) Bei der Division gelten dieselben Regeln, nur wende man, wenn die Regel 1 erfüllt ist, den Divisor (den hinter dem Divisionszeichen stehenden Bruch) dergestallt um, daß sein Nenner zum Zähler und sein Zähler zum Nenner werde.

5) Durch Anwendung dieser Regeln kann die Division und Multiplication mehrerer Brüche gleich in einem Ansatze verrichtet werden, wenn dabei nur auf Ausübung der 4ten Regel gesehen wird.

Anm. Dieser Fall tritt oft bei Ausübung der durch algebraische Formeln angezeigten mehrmaligen Multiplicationen und Divisionen ein und dann gewährt das Heben oft sehr große Abkürzungen.

1te Aufgabe. Es sollen $2\frac{3}{4}$ mit $5\frac{1}{3}$ und dieses Product nochmals mit $4\frac{1}{8}$ multiplicirt werden.

Aufl. $$\frac{2\frac{3}{4} \times 5\frac{1}{3} \times 4\frac{1}{8}}{\frac{11}{4} \times \frac{16}{3} \times \frac{33}{8}}$$ (1ste und 2te Regel).

(3te Regel) $\frac{11 \times 11}{2} = 60\frac{1}{2} =$ dem verlangten Product.

2te Aufgabe. Es sollen $4\frac{1}{2}$ mit $2\frac{2}{3}$ multiplicirt, dieses Product durch $3\frac{1}{5}$ dividirt, der Quotient mit 4 multiplicirt, das Product durch $5\frac{1}{4}$ dividirt und der Quotient abermals mit $3\frac{1}{2}$ multiplicirt werden.

Aufl. $$\frac{4\frac{1}{2} \times 2\frac{2}{3} : 3\frac{1}{5} \times 4 : 5\frac{1}{4} \times 3\frac{1}{2}}{\frac{9}{2} \times \frac{8}{3} : \frac{16}{5} \times \frac{1}{4} : \frac{21}{4} \times \frac{7}{2}}$$ (1ste Regel).

$$\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\cancel{2}} \times \frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\cancel{3}} \times \frac{\overset{4}{\cancel{5}}}{\cancel{16}_{4}} \times \frac{4}{1} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{21}_{7}} \times \frac{7}{2}$$ (2te u. 4te Regel).

(3te Regel) $\frac{5 \times 2}{1} = 10 =$ dem gesuchten Product.

3te Aufgabe. $4\frac{1}{2} \times 3\frac{3}{4} : 3\frac{1}{3} \times 2\frac{3}{5} : 5 \times 4\frac{2}{3} : 3\frac{1}{2} \times 6 : 4\frac{1}{5} \times 2\frac{1}{3} = 10\frac{1}{5}$.

4te Aufgabe. $\frac{3}{4} : 4 \times 5\frac{1}{3} \times 3\frac{1}{5} : 6\frac{1}{8} \times \frac{7}{8} \times 1\frac{1}{4} : 4\frac{1}{2} \times 3\frac{3}{4} = \frac{10}{21}$.

5te Aufgabe. Von einem $3\frac{3}{4}$ Acker großen Gehau hatte man $310\frac{1}{2}$ Klftr. Holz, $140\frac{1}{4}$ ßo. Reißig und $92\frac{1}{3}$ Klftr. Stöcke erhalten; wieviel hat im Durchschnitt der Acker von jeder Sorte gegeben?

Antw. $310\frac{1}{2} : 3\frac{3}{4} = 82\frac{4}{5}$ Klftr. Holz,
$140\frac{1}{4} : 3\frac{3}{4} = 37\frac{2}{5}$ ßo. Reißig,
$92\frac{1}{3} : 3\frac{3}{4} = 24\frac{28}{45}$ Klftr. Stöcke.

6te Aufgabe. Ein Revier hat $720\frac{3}{4}$ Acker Waldboden und wird bei 80jährigem Umtriebe auf Nadelwald bewirthschaftet. Zeither hat 1 Acker im Durchschnitt $83\frac{1}{3}$ Klftr. Scheite, $30\frac{2}{5}$ ßo. Reißig und $28\frac{1}{3}$ Klftr. Stöcke geliefert; wieviel wird man von diesem Revier jährlich nachhaltig entnehmen können?

Antw. $720\frac{3}{4} : 80 \times 83\frac{1}{3} = 750\frac{2}{3}\frac{5}{2}$ Klftr. Scheite.
$720\frac{3}{4} : 80 \times 30\frac{2}{5} = 273\frac{1}{2}\frac{7}{0}\frac{7}{0}$ ßo. Reißig,
$720\frac{3}{4} : 80 \times 28\frac{1}{3} = 255\frac{1}{6}\frac{7}{4}$ Klftr. Stöcke.

Die Auflösung der folgenden Aufgaben kann bei einigem Nachdenken und mittelst der bereits vorgetragenen Regeln leicht bewirkt werden, obgleich selbige eigentlich nicht hierher gehören.

7te Aufgabe. Bei 5 Gehauen, die zusammen 9 Acker 200 □ Ruthen Fläche enthielten, werden auf dem ersten $1\frac{5}{6}$ Schfl., auf dem zweiten $1\frac{1}{4}$ Schfl., auf dem dritten $1\frac{1}{2}$ Schfl., auf dem vierten $1\frac{7}{9}$ Schfl. und auf dem fünften $\frac{8}{9}$ Schfl. Saamen gesäet; wieviel Scheffel waren im Ganzen verbraucht worden, und wieviel Scheffel kommen im Durchschnitt auf den Acker?

Aufl. $1\frac{5}{6} + 1\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2} + 1\frac{7}{9} + \frac{8}{9} = 7\frac{1}{4}$ Schfl.
sind im Ganzen verbraucht worden, und $7\frac{1}{4} : 9\frac{2}{3} = \frac{29}{4} \times \frac{3}{29} = \frac{3}{4}$ Schfl. kommen auf den Acker.

8te Aufgabe. Wieviel betragen 6 Klftr. $\frac{5}{4}$elliges, 4 Kl. $\frac{2}{8}$elliges, 3 Kl. $\frac{7}{4}$elliges, $5\frac{1}{2}$ Kl. $\frac{8}{4}$elliges Scheitholz an $\frac{6}{4}$elligen Klaftern, wenn dabei auf die Zwischenräume keine Rücksicht genommen wird?

Aufl. Man multiplicire die Anzahl der Klaftern mit der Scheitlänge, addire sämmtliche Producte, und dividire diese Summe durch die verlangte Scheitlänge (hier $\frac{6}{4}$).

$\frac{6}{1} \times \frac{5}{4} = \frac{30}{4}$
$\frac{4}{1} \times \frac{2}{8} = \frac{18}{4}$
$\frac{3}{1} \times \frac{7}{4} = \frac{21}{4}$,
$5\frac{1}{2} \times \frac{8}{4} = \frac{44}{4}$

Summe $= \frac{113}{4}$ und $\frac{113}{4} : \frac{6}{4} = 18\frac{5}{6}$ Klftrn. $\frac{6}{4}$ell.

9te Aufgabe. $12\frac{1}{2}$ Klftr. $\frac{9}{8}$ell., 4 Kl. $\frac{5}{4}$ell., 7 Kl. $\frac{6}{4}$ell., 9 Kl. $\frac{7}{4}$ell., und $11\frac{1}{4}$ Kl. $\frac{8}{4}$ell. wurden für $105\frac{3}{4}$ Thlr. gekauft; wieviel machen selbige $\frac{6}{4}$ellige Klaftern aus, und wie theuer kommt eine der letztern?

Aufl. Man verfahre mit Beantwortung der ersten Frage ganz wie bei der vorhergehenden Aufgabe und dividire sodann mit der erhaltenen $\frac{6}{4}$elligen Klafterzahl in $105\frac{3}{4}$ Thlr., so ist der Quotient der Preis einer $\frac{6}{4}$elligen Klafter.

$12\frac{1}{2} \times \frac{9}{8} = \frac{225}{16}$
$\frac{4}{1} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{1}$
$\frac{7}{1} \times \frac{6}{4} = \frac{21}{2}$
$\frac{9}{1} \times \frac{7}{4} = \frac{63}{4}$
$11\frac{1}{4} \times \frac{8}{4} = \frac{45}{2}$

Summe $= \frac{1085}{16}$ und $\frac{1085}{16} : \frac{6}{4} = 45\frac{5}{24}$ Kl. $\frac{6}{4}$ellig, und $105\frac{3}{4} : 45\frac{5}{24} = \frac{423}{4} \times \frac{6}{1085} = \frac{423 \times 6}{1085} = \frac{2538}{1085} =$ $2\frac{368}{1085}$ Thlr. = dem Preis einer $\frac{6}{4}$elligen Klftr.

Zweites Kapitel.

Von den Decimalbrüchen.

---

§. 9.

Ein Decimalbruch ist ein Bruch, der zu seinem Nenner eine bloße Einheit nebst einer oder mehreren angehängten Nullen hat, nämlich dessen Nenner 10, 100, 1000, 10000 u. s. f. Denkt man sich das dekadische Zahlengesetz bei einer beliebigen ganzen Zahl, z. B. 44, von der Linken gegen die Rechte, noch über die Einer hinaus fortgesetzt, so erhält, vermöge dieses Gesetzes, jede neu hinzugekommene Ziffer stets einen zehnmal so kleinen Werth, als die ihr vorhergehende gleiche Ziffer anzeigt; begreiflich können diese Ziffern keine Einheiten, sondern nur Brüche anzeigen, und zwar wird die, den Einern zunächst stehende Ziffer Zehntheile (weil selbige zehnmal kleiner als eine gleiche Ziffer der Einer), die folgende Hunderttheile u. s. w. angeben. Damit man aber weiß, wo diese Brüche ihren Anfang nehmen, wird zwischen die letzte ganze Ziffer (die Einer) und die erste des Bruches (die Zehntheile) ein Komma (,) gemacht; sind aber keine Ganzen vorhanden, so wird die Stelle derselben durch eine 0 angezeigt; dasselbe gilt auch von den Zehntheilen, Hunderttheilen u. s. w., wenn nach denselben noch geltende Ziffern folgen.

Es würde diesen Erklärungen zu Folge $44{,}444 = 44 + \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} = 44\frac{444}{1000}$ seyn. Würde das Komma eine Stelle vor- oder zurückgesetzt, so würde nach dem angeführten Gesetze im ersteren Fall die obige Größe zu $4{,}4444 = 4\frac{4444}{10000}$, im letzteren aber zu $444{,}44 = 444\frac{44}{100}$; sie würde sich also im ersteren Fall zehnmal vermindern, im letzteren zehnmal vermehren.

Die hinter dem Komma stehenden Ziffern heißen Decimalstellen, und nehmen, wie bereits erwähnt, nach demselben Gesetze zu oder ab, wie die ganzen Zahlen.

§. 10.

Ein gewöhnlicher Bruch wird in einen Decimalbruch verwandelt, wenn man an dem Zähler desselben so viel Nullen anhängt, bis sich derselbe durch den Nenner ohne Rest dividiren läßt. Manche Brüche, z. B. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$ u. dgl. lassen sich nie rein in Decimalbrüche verwandeln; in diesem Falle dividirt man so lange durch den Nenner, mittelst Anhängung neuer Nullen, als die Genauigkeit der Rechnung die Entwickelung mehrerer oder wenigerer Decimalstellen erfordert. Bei Brüchen dieser Art kommen entweder immer gleiche Decimalziffern, z. B. lauter Dreien (Beispiel 6 und 7), oder es kommen nach fortgesetzter Division wieder dieselben Ziffern, die anfingen (Beispiel 8, 9 und 12); im letzteren Fall nennt man dies eine Periode.

Bei dem durch die Division erhaltenen Quotienten werden allemal so viel Decimalstellen oder Ziffern von der Rechten nach der Linken zu abgeschnitten, als Nullen an dem Zähler angehängt wurden. Sollten nicht so viel Ziffern vorhanden seyn, so müssen vorn noch so viel Nullen angehängt werden, als Stellen fehlen. (Siehe den 11ten der nachstehenden Brüche.)

Folgende 12 Brüche sind in Decimalbrüche verwandelt.

1) $\frac{3}{4} = 300 : 4 = 0{,}75$
2) $2\frac{3}{4} = \frac{11}{4} = 1100 : 4 = 2{,}75$
3) $\frac{5}{8} = 5000 : 8 = 0{,}625$
4) $4\frac{5}{8} = \frac{37}{8} = 37000 : 8 = 4{,}625$
5) $2\frac{1}{16} = \frac{33}{16} = 330000 : 16 = 2{,}0625$
6) $4\frac{1}{3} = \frac{13}{3} = 130000.. : 3 = 4{,}3333...$
7) $5\frac{5}{6} = \frac{35}{6} = 35000.. : 6 = 5{,}833...$
8) $\frac{5}{7} = 500000000 : 7 = 0{,}71428571..$ (Periode 714285)
9) $4\frac{3}{7} = 3100000000 : 7 = 4{,}42857142..$ (Periode 428571)
10) $4\frac{7}{64} = \frac{263}{64} = 263000000 : 64 = 4{,}109375$

11) $\frac{1}{5^{12}}$ = 1000000000 : 512 = 0,001953125

12) $2\frac{5}{17}$ = 39000000000000000000 : 17 = 2,294117647058823529... (Periode 2941176470588235)

§. 11.

Decimalbrüche werden auf gleiche Benennung gebracht, wenn die fehlenden Decimalstellen bei einem oder mehreren Brüchen durch Anhängung von Nullen so lange ergänzt werden, bis alle Brüche gleichviel Stellen haben; denn eine Null am Ende eines Decimalbruches verändert dessen Werth nicht, sondern es ist 0,75 = 0,750 = 0,7500 = 0,75000 = $\frac{3}{4}$ oder 0,4375 = 0,43750 = 0,437500 = $\frac{7}{16}$.

§. 12.

Addition und Subtraction der Decimalbrüche.

Man addirt und subtrahirt die Decimalbrüche gerade als ob es ganze Zahlen wären, indem man die Zehntheile unter die Zehntheile, die Hunderttheile unter die Hunderttheile ꝛc. setzt, bei der Subtraction beide Brüche auf gleiche Benennung bringt, und bei den Resultaten beider Rechnungsarten die Ganzen endlich durch ein Komma absondert. Ist der Ansatz richtig gebildet, so müssen bei beiden Rechnungsarten sämmtliche Komma's in einer Linie unter einander stehen.

1ste Aufgabe. Folgende Decimalbrüche sind zu addiren: 4,63; 5,0024; 16,428; 7,98; 113; 4,007; 0,00364 u. 4,9025.

Aufl.

4,63
5,0024
16,428
7,98
113,
4 007
0,00364
4 9025

155,95354 Summe.

2te Aufgabe. Der Bruch 0,46785 ist von dem Bruch 3,178 abzuziehen.

Aufl. 3,17800
0,46785

2,71015 Unterschied.

Addition.

3) 5,023
64,0046
7,124
8,502
0,0003
74,23

158,8839

4) 6,78
0,247
0,4792
1,048
5,706
0,39874

14,65894

5) 5,002
0,0004
0,6783
0,7946
5,
4,0283

15,5036 Summe.

Subtraction.

6) 6,7049
5,3700

1,3349

7) 3 00243
1,94600

1,05643

8) 4,784680
2 943712

1,840968 Unterschied.

§. 13.

Multiplication und Division der Decimalbrüche.

Die Multiplication und Division der Decimalbrüche wird ebenfalls nach denselben Regeln gemacht, wie die der ganzen Zahlen, nur ist rücksichtlich des Abschneidens der Decimalstellen folgendes zu bemerken.

Beim Product in der Multiplication werden von der Rechten gegen die Linke so viel Decimalstellen abgeschnitten, als deren beide Factoren zusammen genommen haben; hätte aber das Product nicht so viel Decimalstellen, so müßten selbige durch Anhängung von Nullen, links vor demselben, ergänzt werden, wie dies die 4te, 5te, 7te, 8te und 9te der folgenden Aufgaben zeigen.

Bei der Division bringe man vorher beide Brüche nach §. 11 auf gleiche Benennung. Der herauskommende Quotient bestehet dann aus lauter Ganzen, wenn der Divisor kleiner als der Dividend und in letzterem ohne Rest aufgehet.

Bleibt bei der Division ein Rest, oder ist der Divisor größer als der Dividend, so hänge man an den letzteren noch so viel Nullen an, als man Decimalstellen im Quotienten zu entwickeln gedenkt, und dividire dann wie gewöhnlich. Oder man schneide von dem Quotienten so viel Stellen ab, als der Unterschied beträgt, wenn die Zahl der Stellen des Divisors von der des Dividenden abgezogen wird. Tritt der Fall ein, daß der Divisor größer ist, als der Dividend, so können begreiflich keine Ganzen im Quotienten kommen; die Stelle derselben muß also, so wie die etwa noch mangelnden Decimalstellen, durch eine Null ergänzt werden, wie die 4te, 6te, 7te und 8te der folgenden Aufgaben zeigen.

Multiplications-Aufgaben.

1) 5,4679 × 6 = 32,8074

2) 49,6042 × 0,234 = 11,6073828

3) 96,4872 × 0,0024 = 0,23156928

4) 4,6023 × 0,004 = 0,0184092

5) 0,0246 × 4,003 = 0,0984738

6) 0,5 × 4686 = 2343

7) 48,4 × 0,00024 = 0,011616

8) 4,76 × 0,0029 = 0,013804

9) 0,004 × 0,00064 = 0,00000256

10) 0,0032 × 642 = 0,020544
11) 0,02 × 20 = 0,4
12) 0,004 × 460 = 1,84

Divisions-Aufgaben.

1) 6 : 4,32 = 1,388..

```
432|600|1,388..
   |432|
   ---
Rest 1680
     1296
     ----
      3840
      3456
      ----
       3840
```

2) 24,8538 : 5,403 = 4,6

```
54030|248538|4,6
     |216120|
     ------
Rest 324180
     324180
     ------
```

3) 1424 : 0,445 = 3200

```
445|1424000|3200
   |1335   |
   -------
     890
     890
     ---
      00
```

4) 0,208 : 16 = 0,013

```
16000|20800|0,013
     |16000|
     -------
      48000
      48000
      -----
```

5) 4,276 : 0,2 = 21,38
6) 0,24 : 0,384 = 0,625
7) 0,0023 : 4 = 0,000575
8) 2,46 : 54,2 = 0,045387 ...
9) 13,542 : 2,504 = 5,4081 ...
10) 37 : 48 = 0,7708333...
11) 1 : 2,478 = 0,4035....
12) 26 : 17,24 = 1,5081206...

§. 14.

Bei der Multiplication und Division ist es oft hinlänglich, das Product oder den Quotienten nur bis mit einigen Decimal-

stellen zu entwickeln; in diesem Falle können beide Rechnungen durch Anwendung folgender Regeln sehr abgekürzt werden.

Bei der abgekürzten Multiplication fange man mit der ersten Ziffer zur Linken (im ersten Beispiele die 2) an zu multipliciren, und multiplicire damit den ganzen obern Bruch (den Multiplicandus). Hierauf nehme man nach und nach die folgenden Ziffern des Multiplicators, lasse aber dabei immer nach und nach auch eine Ziffer (jedoch von der Rechten angefangen, erst die 4, dann die 9 ꝛc.) im Multiplicandus so hinweg, daß man solche zwar multiplicirt, von dem erhaltenen Producte aber nur die Zehner zum nächstfolgenden Producte addirt. Im ersten der folgenden Beispiele fiele, wenn mit der 3 multiplicirt würde, im Multiplicandus die 4 hinweg; dann aber wäre das nächste Product $9 \times 3 + 1 = 28$, weil nämlich dazu der, in dem Producte 3×4 enthaltene Zehner addirt ward; eben so würde, wenn mit der 5 multiplicirt würde, die 4 und 9 im Multiplicandus hinwegfallen; da aber $9 \times 5 = 45$, so wäre das nächstfolgende Product $5 \times 7 + 4 = 39$. Von dem Hauptproducte werden endlich so viel Decimalstellen abgeschnitten, als deren der obere Bruch hat; hat jedoch der untere Bruch keine Ganzen, Zehntheile oder Hunderttheile bei sich, so wird die Zahl der abzuschneidenden Stellen um so viel vermehrt, als der untere Bruch Nullen vor der ersten geltenden Ziffer hat; im 3ten Beispiele wäre solche also $7 + 3 = 10$.

Aufgaben.

1)

	5,4376794
×	2 35786
2 ×	108753588
3 ×	16313038
5 ×	2718839
7 ×	380637
8 ×	43500
6 ×	3262
	12,8212864

2)

	9,480746
×	0 24687
2 ×	18961492
4 ×	3792298
6 ×	568844
8 ×	75845
7 ×	6636
	2.3405115

3)	5,4376804
×	0,002368
2 ×	108753608
3 ×	16313041
6 ×	3262608
8 ×	435014
	0,0128764271

4)	0,0046876
×	0,0004794
4 ×	187504
7 ×	32813
9 ×	4218
4 ×	187
	0,0000224722

Bei der abgekürzten Division verfährt man nach vorigem §, hängt aber, nachdem alle Stellen des vorher mit dem Divisor auf gleiche Benennung gebrachten Dividenden herabgesetzt sind, an den Rest keine Nullen, sondern läßt bei der jedesmaligen Bildung des Products aus dem Quotienten und Divisor von dem letzteren immer eine Ziffer (von der Rechten nach der Linken zu) hinweg. Von dem Quotienten werden endlich so viel Decimalstellen abgeschnitten, als man im Ganzen beim Divisor Ziffern weggelassen hat; jede weggelassene Ziffer bewirkt rücksichtlich des Abschneidens der Stellen im Quotienten dasselbe, was die, an den Rest angehängte Null im vorigen § bewirkte, nämlich das Abschneiden einer Decimalstelle im Quotienten.

Aufgaben.

4,287640	9,489784	2,213289..	0,432678	5,438760	12,56999
	8 575280			4 32678	
Rest	914504			1111980	
	857528			865356	
	56976		Rest	246624	
	42876			216339	
	14100			30285	
	12862			25960	
	1238			4325	
	857			3893	
	381			432	
	342			388	
	39			44	
	37			38	
	2			6	

0,04678|9,00000|192,39
|4678|
4 3220
4 2102
11180
9356
Rest = 1824
1403
421
420
1

0,003786|8,000000|2113,048
|7572|
4280
3786
4940
3786
11540
11358
Rest = 182
151
31
29
2

0,24873 : 4568 =

4568,00000|0,24873|0,00005445..
|22840|
2033
1827
206
182
24
22
2

2,4656 : 84,23 =

84,2300|2,4656|0,02927..
|16846|
7810
7580
230
168
62
58
4

24,42 : 36,46823 =

36,46823|24,42000|0,66962
|21 88093|
2 53907
2 18809
35098
32821
2277
2187
90
72
18

Bei den letzteren drei Aufgaben ist der Dividend kleiner als der Divisor, daher müssen gleich beim erstenmal Dividiren so viel Stellen bei letzterem wegfallen, als nöthig sind, um die Division wirklich verrichten zu können; bei der fünften Aufgabe nämlich 5, bei der sechsten aber 2 Stellen, und bei der siebenten Aufgabe nur 1 Stelle; dafür sind aber eben so viel Nullen im Quotienten zu setzen, weil, wenn die Division wirklich verrichtet werden sollte, so viel mal 0 genommen werden müßte, als man Ziffern im Divisor weggelassen hat.

§. 15.

Bei den Rechnungen mit benannten Zahlen können Einheiten einer Gattung, welche Theilganze einer andern Gattung enthält, als Brüche der letzteren Gattung vorgestellt und als solche den Einheiten derselben angehängt werden; so sind z. B. 4 Thlr. 12 gr. $=$ $4\frac{1}{2}$ Thlr., 3 Pfund 16 Loth $=$ $3\frac{1}{2}$ Pfund, 4 Schfl. 12 Mtz. $=$ $4\frac{3}{4}$ Schfl. u. s. w.

Um dies für jeden Fall zu bewirken, gilt die Regel: daß die gegebene Zahl der Theilganzen (oben die 12 gr., 16 Loth, oder 12 Metzen) durch die Zahl, welche anzeigt, wieviel solcher Theilganzen ein Ganzes der nächst höheren Gattung ausmachen, dividirt wird. In obigen Beispielen wäre nun $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ oder $\frac{16}{32} = \frac{1}{2}$ oder $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$, weil der Thaler 24 Groschen, das Pfund 32 Loth, und der Scheffel 16 Metzen hat. Ist nun bei der Zahl der Theilganzen einer größeren Gattung noch ein Bruch, so wird die Division als Bruchdivision nach §. 8 gemacht.

Die folgenden Aufgaben werden das eben Angegebene mehr erläutern.

1ste Aufgabe. Der wievielste Theil eines Thalers sind 5 gr. 4 pf.?

Aufl. Da der Groschen $=$ 12 pf., so sind $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ gr., und $5\frac{1}{3} : 24 = \frac{16}{3} \times \frac{1}{24} = \frac{2}{9}$ Thlr.

2te Aufgabe. Der wievielste Theil eines Zentners sind 24 Pfund 12 Loth $2\frac{1}{5}$ Quentchen?

Aufl. Da der Zentner = 110 Pfund, das Pfund = 32 Loth, und das Loth = 4 Quentchen, so ist

$2\frac{1}{5} : 4 = \frac{11}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{20}$ Loth, und

$12\frac{11}{20} : 32 = \frac{251}{20} \times \frac{1}{32} = \frac{2511}{640}$ Pfund, und

$24\frac{2511}{640} : 110 = \frac{15611}{6400} \times \frac{1}{110} = \frac{15611}{704000}$ Zentner.

3te Aufgabe. Was für ein Theil der zwölfschuhigen Ruthe sind 4 Fuß $5\frac{1}{7}$ Zoll?

Aufl. Da die Ruthe = 12 Fuß, der Fuß = 12 Zoll, so ist $5\frac{1}{7} : 12 = \frac{36}{7} \times \frac{1}{144} = \frac{3}{7}$ Fuß, und

$4\frac{3}{7} : 12 = \frac{31}{7} \times \frac{1}{144} = \frac{31}{1008}$ Ruthe.

Eben so verwandelt man den Bruch einer höheren Gattung in Einheiten einer kleineren durch die Multiplication mit der Zahl, welche anzeigt, wieviel Einheiten der niederen Gattung (als Theilganze der höheren betrachtet) zu einem Ganzen der höheren Gattung gehören; so würden also, um $\frac{3}{4}$ Thlr. in Groschen zu verwandeln, dieselben mit 24, oder um $\frac{5}{8}$ Schfl. in Metzen zu verwandeln, diese mit 16 multiplicirt werden müssen. Als erläuternde Beispiele folgen hier erst die Proben auf vorstehende 3 Aufgaben.

1) Wieviel Groschen und Pfennige betragen $\frac{2}{9}$ Thlr.?

Aufl. Da 1 Thlr. = 24 gr., so ist $\frac{2}{9} \times \frac{24}{1} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$ gr.; und da 1 gr. = 12 pf., so ist $\frac{1}{3} \times \frac{12}{1} = 4$ pf., also $\frac{2}{9}$ Thlr. = 5 gr. 4 pf.

2) Wieviel Pfunde, Lothe und Quentchen betragen $\frac{15611}{704000}$ Zentner?

Aufl. Da 1 Zentner = 110 Pfund, so ist $\frac{15611}{704000} \times \frac{110}{1} = \frac{15611}{640} = 24\frac{251}{640}$ Pfund; da das Pfund = 32 Loth, so ist $\frac{251}{640} \times \frac{32}{1} = \frac{251}{20} = 12\frac{11}{20}$ Loth, und da das Loth = 4 Quentchen, so ist $\frac{11}{20} \times \frac{4}{1} = \frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$ Quentchen; folglich ist $\frac{15611}{704000} = 24$ Pfund 12 Loth $2\frac{1}{5}$ Qu.

3) Wieviel betragen $\frac{3}{8}\frac{1}{4}$ der zwölfschuhigen Ruthen an Fuß und Zoll?

Aufl. $\frac{3}{8}\frac{1}{4} \times \frac{12}{1} = \frac{36}{7} = 4\frac{3}{7}$ Fuß, und $\frac{3}{7} \times \frac{12}{1} = \frac{36}{7} = 5\frac{1}{7}$ Zoll; folglich $\frac{3}{8}\frac{1}{4} = 4$ Fuß $5\frac{1}{7}$ Zoll.

Ist der, auf Theilganze einer höheren Gattung zu bringende Bruch ein Decimalbruch, so wird derselbe, mit Berücksichtigung der eben ausgeführten Regeln, nach §. 13, multiplicirt. Als Beispiele dienen folgende 3 Aufgaben.

1ste Aufgabe. Wieviel betragen 5,48 Thlr. an Thalern, Groschen und Pfennigen?

Aufl. Da 1 Thlr. = 24 gr., so ist $0{,}48 \times 24 = 11{,}52$ gr., und da 1 gr. = 12 pf., so ist $0{,}52 \times 12 = 6{,}24$ pf. Es ist daher 5,48 Thlr. = 5 Thlr. 11 gr. 6,24 pf.

2te Aufgabe. Wieviel Zentner, Pfunde, Lothe und Quentchen machen 4,425 Zentner?

Aufl. $0{,}425 \times 110 = 46{,}750$ Pfund,

$0{,}75 \times 32 = 24$ Loth; also

4,422 = 4 Zentner 46 Pfund 24 Loth — Quentchen.

3te Aufgabe. Wieviel betragen 47,45 Ruthe an Fuß und Zoll? (die Ruthe zu $15\frac{1}{2}$ Fuß, den Fuß zu 12 Zoll gerechnet.)

Aufl. $0{,}45 \times 15\frac{1}{2} = 0{,}45 \times \frac{31}{2} = \frac{45}{100} \times \frac{31}{2}$ $= \frac{1395}{200} = 6\frac{195}{200}$ Fuß, und $\frac{195}{200} \times \frac{12}{1} = \frac{2340}{200} = 9{,}9$ Zoll; also 47,45 = 47 Ruthen 6 Fuß 9,9 Zoll.

Drittes Kapitel.

Von den zusammenhängenden oder Kettenbrüchen.

§. 16.

Dividirt man bei einem ächten Bruche Zähler und Nenner durch den Zähler, so wird man einen Bruch erhalten, dessen Zähler 1 und dessen Nenner eine ganze Zahl + dem, bei der Division des Nenners übrig gebliebenen Bruche ist; dividirt man bei letzterem wiederum den Zähler und Nenner durch seinen Zähler, so erhält man abermals einen Bruch von obiger Beschaffenheit. Setzt man diese Division noch weiter fort, so wird man endlich einen Divisor bekommen, der keinen Rest läßt, womit sich nämlich Zähler und Nenner des angehängten Bruches ohne Rest dividiren lassen. In der folgenden ersten Aufgabe ist dies die 1, womit der Zähler und Nenner des Bruches $\frac{1}{3}$ dividirt wird; überhaupt ist dieser Divisor allemal = 1, sobald Nenner und Zähler Primzahlen unter sich sind. Durch dieses Verfahren wird der angenommene ächte Bruch in einen continuirlichen oder Kettenbruch verwandelt.

Man bezweckt durch diese Verwandlung vorzüglich die Aufsuchung eines Näherungswerthes für einen, aus vielen Ziffern bestehenden Bruch, dessen Nenner und Zähler unter sich Primzahlen sind.

§. 17.

Jeder ächte Bruch wird nach folgenden Regeln in einen Kettenbruch verwandelt.

1) Suche man nach §. 6 das größte gemeinschaftliche Maß zwischen Nenner und Zähler des gegebenen Bruches.
2) Die dadurch erhaltenen Quotienten sind die Nenner der anzuhängenden einzelnen Brüche, deren Zähler allemal = 1.

3) Verbinde man jeden folgenden Bruch durch das Additionszeichen (+) mit dem Nenner des vorhergehenden Bruches.

Aufgabe. Der Bruch $\frac{271}{1351}$ soll in einen Kettenbruch verwandelt werden.

Aufl. Es ist $1351 : 271 = 4$ und $\frac{267}{271}$, also

$$\frac{271}{1351} = \frac{1}{4+\frac{267}{271}}$$

; ferner ist $271 : 267 = 1\frac{4}{267}$, also

$$\frac{271}{1351} = \frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{4}{267}}}$$

; ferner ist $267 : 4 = 66$ und $\frac{3}{4}$, also

$$\frac{271}{1351} = \frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{66+\frac{3}{4}}}}$$

; nun ist $4:3 = 1\frac{1}{3}$ u. $3:1 = 3$, also

$$\frac{271}{1351} = \frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{66+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}}}$$

§. 18.

Die Näherungswerthe für den Bruch $\frac{271}{1351}$ (und auch für alle andere Brüche) kann man durch folgendes Verfahren sogleich aus dem, nach §. 6 gefundenen Quotienten, hier = 4, 1, 66, 1 und 3 bestimmen. Man schreibt nämlich die Quotienten in eine Linie hinter einander, ziehet darunter zwei, mit selbiger gleichlaufende Striche, und theilt diese Linien durch senkrechte, zwischen den Quotienten gezogene Striche in Fächer, wie solches in der nachstehenden Tafel zu sehen ist. Unter den ersten Strich, ein Fach vor dem ersten Quotienten, setzt man eine Null, und unter diese, unter den zweiten Strich, eine 1. Unmittelbar unter den ersten Quotienten schreibt man ebenfalls

eine 1, und unter diese, unter den zweiten horizontal laufenden Strich, den ersten Quotienten (hier 4); so hat man (in $\frac{4}{1}$) den ersten Näherungsbruch. Diese beiden Zahlen multiplicirt man, jede für sich, mit dem nächstfolgenden Quotienten (hier 1) und addirt zu diesem Product die in dem nächstvorstehenden Fache enthaltene Ziffer, so erhält man hier $1 \times 1 + 0 = 1$ zum Zähler, und $4 \times 1 + 1 = 5$ zum Nenner des zweiten Näherungsbruches, welchen man, den Zähler unter den ersten, den Nenner unter den zweiten Strich, in das nächstfolgende Fach setzt. Mit dem folgenden Quotienten (hier 66) multiplicirt man wiederum den Nenner und Zähler des eben bestimmten Bruches und addirt bei jedem Producte die in dem nächstvorstehenden Fache enthaltene Ziffer dazu, so erhält man in $1 \times 66 + 1 = 67$ den Zähler, und in $5 \times 66 + 4 = 334$ den Nenner des dritten Näherungsbruches. Diesen auf dieselbe Art mit dem folgenden Quotienten multiplicirt und die vor ihm stehenden Ziffern dazu addirt, gibt in $67 \times 1 + 1 = 68$ den Zähler und in $334 \times 1 + 5 = 339$ den Nenner des vierten Näherungsbruches. Behandelt man diesen auf gleiche Art mit dem letzten Quotienten (3), so muß in $68 \times 3 + 67 = 271$ der Zähler, und in $339 \times 3 + 334 = 1351$ der Nenner des gegebenen Bruches wieder erhalten werden, wenn man richtig verfahren hat. Das Nähere zeigt die hier stehende Tafel.

	4	1	66	1	3
0	1	1	67	68	271
1	4	5	334	339	1351

§. 19.

Die nach vorigem §. entwickelten Näherungsbrüche kommen dem Werthe des gegebenen ächten Bruches immer näher, je mehrere derselben entwickelt werden, und zwar ist

der erſte entwickelte Bruch immer etwas gröſſer, als der wahre Werth, der zweite etwas kleiner, der dritte wieder etwas gröſſer, der vierte etwas kleiner, und nach dieſem Geſetze fort.

Die Gröſſe, um welche der Näherungsbruch von dem gegebenen Bruche abweicht, findet man am ſchnellſten, wenn man beide Brüche in Decimalbrüche verwandelt und den kleinern von dem gröſſern abzieht. Dieſe Regel auf die im vorigen §. gelöſte Aufgabe angewendet, gibt folgende Reſultate.

Es iſt $\frac{2\,7\,1}{1\,3\,5\,1} = 0{,}20059215\ldots$

Der 1ſte Näherungsbruch $\frac{1}{4} = 0{,}25$ iſt alſo um 0,04940784.. zu groß,

= 2te = $\frac{1}{5} = 0{,}2$ iſt alſo um 0,00059215.. zu klein, aber doch ſchon bis auf die Zehntauſendtheile richtig,

= 3te = $\frac{6\,7}{3\,3\,4} = 0{,}20059880\ldots$ iſt alſo um 0,00000665... zu groß, und

= 4te = $\frac{6\,8}{3\,3\,9} = 0{,}20058997\ldots$ iſt alſo um 0,00000218.. zu klein.

§. 20.

1ſte Aufgabe. Der Bruch $\frac{4\,7\,2}{1\,5\,4\,1}$ ſoll in einen Kettenbruch verwandelt und ſeine Näherungswerthe beſtimmt werden.

Aufl. 1541 : 472 = 3 und $\frac{1\,2\,5}{4\,7\,2}$

472 : 125 = 3 und $\frac{9\,7}{1\,4\,5}$

125 : 97 = 1 und $\frac{2\,8}{9\,7}$

97 : 28 = 3 und $\frac{1\,3}{2\,8}$

28 : 13 = 2 und $\frac{2}{1\,3}$

13 : 2 = 6 und $\frac{1}{2}$

2 : 1 = 2, alſo

$$\frac{472}{1541} = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2}}}}}}}$$

Die Näherungsbrüche sind nach §. 18:

	3	3	1	3	2	6	2
0	1	3	4	15	34	219	472
1	3	10	13	49	111	715	1541

wovon der Bruch $\frac{4}{13}$ um 0,0013976... und der Bruch $\frac{34}{111}$ um 0,00001169.... zu groß ist.

2te Aufgabe. Der Dresdner Fuß hat 283,107 natürliche Millimetres, der Wiener dagegen 316,103, d. h. der Dresdner Fuß verhält sich zum Wiener wie 283107 zu 316103. Dieses Verhältniß soll in kleineren Zahlen ausgedrückt werden.

Aufl. Man sehe diese Größen als Zähler und Nenner eines Bruches an, und setze denselben $= \frac{283107}{316103}$, verwandle ihn in einen Kettenbruch und bestimme nach §. 18 die Näherungsbrüche. Man erhält durch die im §. 6 angeführte Division die Quotienten 1, 8, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 9, 2, 1, 1, 1, 3 und 2; daher erhält man folgende Näherungsbrüche:

	1	8	1	1	2	1	1	1	1	1	9	2	1	1	1	3	2
0	1	8	9	17	43	60	103	163	266	429	4127	8683	12810	21493	34303	124402	283107
1	1	9	10	19	48	67	115	182	297	479	4608	9695	14303	23998	38301	138901	316103

Wird von diesen Näherungsbrüchen gesetzt:

der Dresdner Fuß = 8, so ist der Wiener = 9, das Verhältniß aber ist um 0,00672... zu klein,

der Dresdner Fuß = 43, so ist der Wiener = 48, das Verhältniß aber ist um 0,000217.. zu groß,

der Dresdner Fuß = 4127, so ist der Wiener = 4608, das Verhältniß aber ist um 0,000000017... zu groß.

3te Aufgabe. Der Berliner Scheffel hat 547,246, der Leipziger aber 1066,801 natürliche Decilitres, oder, der Berliner Scheffel verhält sich zum Leipziger wie 547246 zu 1066801. Wie läßt sich dieses Verhältniß durch kleinere Zahlen darstellen?

Aufl. Die Quotienten sind 1, 1, 18, 1, 3, 4, 1, 2, 2, 11, 3, 2, 2. Nachstehende Tafel enthält die Näherungsbrüche.

	1	1	18	1	3	4	1	2	2	11	3	2	2
0	1	1	19	20	79	336	415	1166	2747	31383	96896	225175	547246
1	1	2	37	39	154	655	809	2273	5355	61178	188889	438956	1066801

Wird nun von diesen Näherungsbrüchen gesetzt:

der Berliner Schfl. = 1, so ist der Leipziger = 2, das Verhältniß 1 zu 2 ist aber um 0,0129785 zu klein,

er Berliner Schfl. = 19, so ist der Leipz. = 37, das Verhältniß 19 zu 37 ist aber um 0,000535 zu groß,

Berliner Schfl. = 336, so ist der Leipz. = 655, das Verhältniß 336 zu 655 ist aber um 0,00000142... zu klein.

4te Aufgabe. Wird der Durchmesser eines Kreises = 100000000000000... gesetzt, so ist die Peripherie dieses Kreises = 314159265358979... Man soll einen Näherungsbruch, bei dem der Nenner und Zähler jeder nur aus höchstens 5 Ziffern besteht, suchen; dieser ist?

Aufl. Hier ist die Entwickelung aller Quotienten nicht nöthig, weil das Näherungsverhältniß nur aus höchstens 5 Ziffern bestehen soll; man entwickle daher nur die 5 bis 6 ersten Quotienten, und suche nach Vorigem die Näherungsbrüche. Diese Quotienten sind 3, 7, 15, 1, 292, 1, und die Näherungsbrüche sind $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{22}$, $\frac{106}{333}$, $\frac{113}{355}$ und $\frac{33102}{103993}$. Setzt man nun

den Durchmesser = 1, so ist die Peripherie = 3, das Verhältniß 1 zu 3 aber ist um 0,14159.. zu klein,

den Durchm. = 7, so ist die Per. 22, das Verh. 7 zu 22 aber ist um 0,000126.. zu groß,

den Durchm. = 106, so ist die Per. 333, das Verh. 106 zu 333 aber ist um 0,0000026.... zu klein,

den Durchm. = 113, so ist die Per. 355, das Verh. 113 zu 355 aber ist um 0,00000002667.. zu groß,

den Durchm. = 33102, so ist die Per. = 103993, das Verh. 33102 zu 103993 aber um 0,000000000057789.. zu klein.

Zweiter Abschnitt.

Buchstabenrechenkunst.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Erklärungen.

§. 21.

Der Selbstdenkende wird aus dem bereits Vorgetragenen den Schluß gezogen haben, daß die Auflösung der Rechnungsaufgaben in zwei wesentlich verschiedenen Theilen bestehet. Bei dem ersten Theile wird untersucht, welche von den 4 Grundrechnungsoperationen zur Auflösung der Aufgabe angewandt werden müsse; der zweite Theil umfaßt die wirkliche Anwendung der, durch den ersten Theil bestimmten Rechnungsarten.

Damit indeß nicht bei jeder Aufgabe jene Untersuchungen — die den ersten Theil der Auflösung ausmachen — anzustellen nöthig sind, so hat man für diejenigen Aufgaben, welche gleiche Bedingungen enthalten, Regeln festgesetzt, nach welchen man beim zweiten Theil der Auflösung verfährt. Solche Regeln sind z. B. die bei der Multiplication der Brüche gegebenen.

Werden solche, die Anwendung der 4 Grundrechnungen bestimmenden Regeln nicht durch Worte, sondern durch Größen, die mit den in der Einleitung bereits erklärten und noch ferner folgenden Zeichen verbunden sind, ausgedrückt, so erhält ein solcher Ausdruck den Namen einer Formel.

Wollte man sich in einer solchen Formel, zur Bezeichnung der bei ihr vorkommenden Größen, der Ziffern bedienen, so wäre dieselbe nur für den Fall anwendbar, wenn die, mit der ufgabe gegebenen Größen zufällig denselben Werth hätten, den oie in die Formel gesetzten Ziffern anzeigten. Nimmt man aber zur Bezeichnung der Größen Zeichen, an deren Stelle jede beliebige Ziffer gesetzt werden kann, so wird obiger Nachtheil vermieden. Zu dieser allgemeineren Bezeichnung der Größen nimmt man gewöhnlich die Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets und bezeichnet die bekannten Größen (oder vielmehr die Stellen, welche selbige in der Formel einnehmen) mit den Anfangsbuchstaben a, b, c, d ꝛc., die unbekannten aber mit den Endbuchstaben v, w, x, y, z. Diese Bezeichnung der Größen durch Buchstaben gibt dieser Rechnungsart den Namen der Buchstabenrechenkunst oder Algebra; die auf solche Art bezeichneten Größen aber werden algebraische Größen genannt.

§. 22.

Aus diesen Erklärungen geht hervor, daß die Buchstaben, womit man die Größen bezeichnet, an und für sich keinen Werth haben, sondern nur die Stelle bezeichnen, wo die Größen, mit denen die angedeuteten Rechnungen vorgenommen werden, eigentlich stehen sollten. Der Ausdruck $\frac{a \times b}{c} = \frac{ab}{c}$, würde sonach zwar anzeigen, daß a mit b zu multipliciren und das Product durch c zu dividiren wäre; die Multiplication und Division könnte aber nur dann erst, den Zahlengesetzen gemäß, vollzogen

werden, wenn die Buchstaben einen numerischen Werth erhielten; würde z. B. gesetzt: $a = 4$, $b = 3$ und $c = 6$, so wäre $\frac{ab}{c} = \frac{4 \times 3}{6} = 2$

§. 23.

Bei algebraischen Größen wird außer dem numerischen Werthe, der durch sie bezeichnet wird, auch die Eigenschaft der Größe in Beziehung auf eine andere in Betracht gezogen. Zwei Größen von einerlei Art können nämlich unter solchen Bedingungen statt finden, daß die eine durch ihre Eigenschaften die andre vermindert oder ganz aufhebt. Dieser Fall tritt z. B. bei Untersuchung der Größe eines Vermögens ein; hier würden das baare Geld und andre Sachen von Werth, Größen von der Eigenschaft seyn, die das Vermögen vermehren, da hingegen Schulden Größen von der Eigenschaft wären, die erstere verminderten, oder, wenn sie mit jenen einen gleich großen numerischen Werth hätten, ganz aufhöben. Wäre im entgegengesetzten Falle aber die Schuldenmasse eines fallirten Kaufmanns zu bestimmen, so würde die Größe, welche die vorhandenen Schulden bezeichnete, die Eigenschaft erhalten, jene Masse zu vermehren, das vorhandene Geld aber, und andre Sachen von Werth, würden die Schuldenmasse vermindern. In beiden Fällen würde die zu bestimmende Größe $= 0$, wenn Schulden und Geld oder Geldeswerth gleich groß sind.

Die auf solche Art gegen einander betrachteten Größen heißen entgegengesetzte, und zwar heißt die, welche die zu bestimmende Größe, (im ersteren Falle das Vermögen, im andern die Schuldenmasse), ihrer Eigenschaft zufolge, vermehrt, die positive oder bejahende, und die ihr entgegengesetzte, die negative oder verneinende Größe; die Eigenschaft jener wird durch das Zeichen der Addition (+), die der letztern durch das der Subtraction (—) bezeichnet.

Jede algebraische Größe erhält ihre Eigenschaft durch die in der Aufgabe gegebenen Bedingungen; diese Eigenschaft kann zwar durch fortgesetzten algebraischen Calcul in die entgegengesetzte übergehen, jedoch werden selbst in dem Falle die in der Aufgabe ursprünglich liegenden Verhältnisse der Größen unter einander dieselben seyn. Wäre z. B. durch eine Aufgabe bedingt, daß b zu a addirt c zum Vorschein brächte, so wäre $a + b = c$. Hier hätte die Größe b, vermöge der Bedingungen der Aufgabe, die positive Eigenschaft, die Größe a zu vermehren; die Größe a würde man aber ohne Vermehrung erhalten, und doch den in der Aufgabe liegenden Bedingungen Genüge leisten, wenn man die Größe b in Beziehung auf c negativ nähme. Denn von der Summe zweier Größen die eine abgezogen (negativ genommen), gibt in dem Rest die andre Größe. Folglich wäre $a = c - b$, oder anstatt a, b und c die Werthe 7, 9 und 16 gesetzt, gäbe

für $a + b = c$, $7 + 9 = 16$, und

für $a = c - b$, $7 = 16 - 9$.

Eben so würde $a + b - c = 0$, oder $7 + 9 - 16 = 0$.

Anmerk. Bei einer vornan stehenden positiven Größe wird gewöhnlich das Eigenschaftszeichen + weggelassen und die Größe ohne Zeichen hingeschrieben; so sollte in dem eben angeführten Beispiel eigentlich $+a + b = +c$ stehen; weil aber a und c anfangen und beide positiv sind, so wird abgekürzt geschrieben: $a + b = c$.

§. 24.

Wird eine durch Buchstaben bezeichnete Größe mit einer Ziffer multiplicirt, so wird letztere der Coefficient der erstern genannt und, ohne Multiplicationszeichen, unmittelbar an den Buchstaben gesetzt. Bei Buchstaben, vor denen keine Ziffer als Coefficient steht, ist derselbe $= 1$. Es ist nämlich bei $4ab$ der Coefficient $= 4$, und bei ab ist derselbe $= 1$.

Wird aber eine Größe ein- oder mehreremal mit sich selbst multiplicirt, so wird diese Multiplication ebenfalls durch eine

Zahl, welche rechts oberhalb der Größe gesetzt und der Exponent oder Potenzenanzeiger genannt wird, angezeigt; von der Größe selbst sagt man aber, sie steht in der 2ten, 3ten, 4ten..., $n-1$sten oder $n$ten Potenz, je nachdem der Exponent $= 2, 3, 4..., n-1$ oder $= n$ ist. Ist kein Exponent vorhanden, so ist derselbe $= 1$; die Größe steht also in der 1sten Potenz.

Eine Zahl, oder irgend eine andre Größe in was immer für eine Potenz erheben aber heißt: die Einheit so vielmal mit dieser Zahl oder Größe multipliciren, als der Potenzenanzeiger Einheiten hat. Sollte z. B. die Größe a, welche $= 4$ seyn mag, zur 3ten Potenz erhoben werden, so ist den gegebenen Erklärungen zufolge:

$a^3 = 1 \times a \times a \times a$ oder $4^3 = 1 \times 4 \times 4 \times 4 = 64$.

Ist der Exponent $= 1$, so ist $1 \times a = a^1$ oder $1 \times 4 = 4^1$; die Größe hat also in dem Falle den numerischen Werth, welcher durch die Ziffern oder Buchstaben, wodurch man selbige bezeichnet, angegeben wird.

Ist der Exponent $= 0$, so ist die Größe $= 1$; es ist nämlich $a^0 = 1$ oder $4^0 = 1$.

Die zweite Potenz einer Größe wird auch das Quadrat, die dritte der Cubus, und die vierte das Biquadrat genannt; so ist z. B.

$4^2 = 16$ das Quadrat von 4,
$4^3 = 64$ der Cubus von 4, und
$4^4 = 256$ das Biquadrat von 4.

Anmerk. Um den Unterschied zwischen Coefficienten und Exponenten recht anschaulich zu machen, nehme der Anfänger an: beide wären $= 3$ und ständen bei a als $3a$ und a^3, so ist 3 bei $3a$ der Coefficient, und wenn $a = 4$, so ist $3a = 12$. Stände aber a^3, so ist 3 der Exponent, und $a^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$.

§. 25.

Wird eine durch Buchstaben bezeichnete Größe durch eine andre dividirt, so heißt letztere — wie bei den Brüchen — der Nenner, und wird auch, wie dort, unter die zu dividirende Größe, oder mittelst des Divisionszeichens (:) hinter selbige gesetzt. Soll nämlich a durch b dividirt werden, so ist $a : b = \frac{a}{b}$; eben so ist $4ac : 3de = \frac{4ac}{3de}$

§. 26.

Gleichnamig heißen algebraische Größen, wenn sie gleiche Buchstaben und gleiche Exponenten haben; die Eigenschaftszeichen und Coefficienten derselben aber können verschieden seyn; so sind z. B. $3a^2$ und $-a^2$, ferner $4b^2c$ und $-3b^2c$ gleichnamige, $5ab$ und $5ab^2$ aber ungleichnamige Größen.

Einsätzig werden algebraische Größen genannt, wenn selbige nicht mit andern Größen durch die Zeichen + oder — verbunden sind; doch können Größen durch mehrere Buchstaben oder Ziffern multiplicirt oder dividirt werden und doch einsätzige Größen bleiben; so sind z. B. a, b, $\frac{ab}{c}$, $\frac{3ac^2}{4b}$ einsätzige Größen.

Mehrsätzige oder zusammengesetzte Größen sind solche, wo mehrere einsätzige Größen durch die Zeichen + oder — mit einander verbunden sind; z. B. $3a + \frac{4b}{c} - d^2$. Die einsätzigen Größen einer mehrsätzigen Größe heißen auch die Glieder der letztern.

§. 27.

Oft sollen bei der Buchstabenrechenkunst zusammengesetzte Größen durch eine Zahl oder einen Buchstaben **multiplicirt** oder **dividirt** werden. Im ersteren Falle schließt man die gegebene mehrsätzige Größe gewöhnlich in Klammern (Parenthesen) ein, setzt vor selbige den Buchstaben oder die Ziffer, womit die in den Klammern stehende Größe multiplicirt werden soll, und zeigt auf diese Art die Multiplication nur an. Sollte z. B. die Größe $5a^2 + \frac{4b}{3c} - \frac{4ab}{d}$ mit $\frac{4a^2}{bc}$ multiplicirt werden, so ist diese Größe $5a^2 + \frac{4b}{3c} - \frac{4ab}{d} \times \frac{4a^2}{bc} =$ $\frac{4a^2}{bc}\left(5a^2 + \frac{4b}{3c} - \frac{4ab}{d}\right)$; eben so zeigt: $(5a + 4b)$ $(3c - 6d)$, daß $3c - 6d$ mit $5a + 4b$ multiplicirt werden soll; ferner zeigt $\frac{5a}{c}\left(3b + \frac{4c}{5} - x\right)^3$, daß die Größe $3b + \frac{4c}{5} - x$ zur dritten Potenz erhoben und dann mit $\frac{5a}{c}$ multiplicirt werden soll; dagegen würde $\left[\frac{5a}{c}\left(3b + \frac{4c}{5} - x\right)\right]^3$ anzeigen, daß die Erhebung der dritten Potenz erst nach vorgenommener Multiplication mit $\frac{5a}{c}$ geschehen soll.

Im zweiten Fall (bei der Division) setzt man die zu dividirende Größe als **Zähler**, den Divisor aber als **Nenner** eines Bruches an, wenn die mehrsätzige Größe nicht schon mit Nennern versehen ist (oft aber auch in diesem Fall), oder man setzt den Dividend in Klammern, und ist der Divisor auch mehrsätzig, auch diesen, und zwischen dieselben das Divisionszeichen (:), so daß der Dividend vor, der Divisor aber nach demselben zu stehen kommt. Soll z. B. die Größe $\frac{4a^2}{b} + 5a - \frac{4c}{d}$ durch

$\frac{4ab'}{c}$ dividirt werden, so ist diese Größe $= \left(\frac{4a^2}{b} + 5a - \frac{4c}{d}\right) :$ $\frac{4ab}{c}$ oder $= \frac{\frac{4a^2}{b} + 5a - \frac{4c}{d}}{\frac{4ab}{c}}$; eben so zeigt $\frac{3ab^2 - 4a^3 + 3cd}{4ab}$, daß die oberhalb des Striches stehende mehrsätzige Größe durch $4ab$ dividirt werden soll; ferner zeigt $\left(\frac{4ab^2 - 3c}{d}\right) : \left(\frac{3a^2c - 4b^2}{3b}\right)$, daß die Größe $4ab^2 - 3c$ durch d und die Größe $3a^2c - 4b^2$ durch $3b$, erstere aber wieder durch letztere Größe dividirt werden soll. $\left(\frac{4b^2 - 3c + d}{a}\right)^2 : (4a^2 + 3b)$ zeigt, daß der in den Klammern stehende Dividend vorher zur zweiten Potenz erhoben und erst dann durch den hinter dem Zeichen stehenden Divisor dividirt werden soll; stände dagegen $\left[\left(\frac{4b^2 - 3c + d}{a}\right) : (4a^2 + 3b)\right]^2$ so würde dies anzeigen, daß erst der durch die Division der ersten Größe mit der hintern erhaltene Quotient zur zweiten Potenz zu erheben seyn würde.

Zweites Kapitel.

Die vier Rechnungsarten mit Buchstaben.

§. 28.

Addition und Subtraction zusammengesetzter algebraischer Größen.

Beide Rechnungen sind mehr eine Reduction mehrerer zusammengesetzter Größen, unter welchen sich gleichnamige Glieder finden, auf eine mindere Anzahl von Gliedern, indem nur bei den gleichnamigen Gliedern die Rechnungen (Addition oder Subtraction) wirklich ausgeübt werden.

Für beide Rechnungsarten gelten folgende Regeln.

1) Man suche unter den gegebenen Größen die gleichnamigen Glieder auf, und schreibe solche unter einander.

2) Diejenigen Glieder, zu welchen sich kein gleichnamiges vorfindet, schreibe man mit ihren Zeichen in eine Reihe hinter einander, gleichviel, in welcher Ordnung, denn der Stand ändert in der Buchstabenrechnung den Werth der Größe nicht, wie dies bei den Ziffern in der Arithmetik der Fall ist.

3) Alle Coefficienten der gleichnamigen Glieder werden zusammen addirt, wenn alle Zeichen bei selbigen gleich sind; sind die Zeichen aber ungleich, so daß einige positiv, andre negativ sind, so addire man die Coefficienten der positiven und die der negativen gleichnamigen Glieder, jede für sich, und ziehe die kleinere dieser beiden Summen von der größeren ab; der Rest erhält das Zeichen, welches die größere Summe hatte.

4) Zu der Summe, oder dem nach 3 erhaltenen Reste der gleichnamigen Glieder setze man den oder die Buchstaben (wenn nämlich zwei oder mehrere mit einander multiplicirt

oder durch einander dividirt erscheinen) mit ihren Exponenten nur einmal. Die unter 2 angegebene Reihe der ungleichnamigen Glieder aber setze man bei der Addition, ohne Veränderung, mit ihren Zeichen zu den Summen der gleichnamigen Glieder.

5) Bei der Subtraction setze man die abzuziehende Größe, gleichwie in der gemeinen Arithmetik, unter die Größe, von welcher sie abgezogen werden soll, und zwar so, daß die gleichnamigen Glieder unter einander zu stehen kommen, verwandle hierauf alle Zeichen der abzuziehenden Größe in die entgegengesetzten, d. h. man verwandle + in — und — in +, und verfahre sodann genau nach den, bei der Addition gegebenen Regeln.

§. 29.

Additions- und Subtractions-Aufgaben.

Damit der Anfänger die Richtigkeit der Resultate der Buchstabenrechenkunst mit denen der Arithmetik zu vergleichen im Stande sey, sind für die Buchstaben folgende Zahlenwerthe angenommen, und der algebraischen Addition ist die Addition dieser Ziffern allemal gegenüber gestellt worden. Es soll nämlich $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$ und $e = 1$ seyn. Eben so ist die erste Regel, nämlich die Untereinandersetzung der gleichnamigen Glieder, bei den folgenden Aufgaben schon ausgeführt.

I. Addition.

1)

$7a =$	14
$-4a =$	-8
$2a =$	4
$-a =$	-2
S. $4a =$	8

2)

$2ab^2 + a =$	36	$+2 =$ 38
$-4ab^2 - a =$	-72	$-2 = -74$
$-ab^2 - 5a =$	-18	$-10 = -28$
$3ab^2 + 9a =$	54	$+18 =$ 72
$+4a =$	0	$+8 =$ 8

3)

$4a + ab - 4c =$	8	$+6 - 16 = -2$
$-2a - 4ab + 2c - d =$	-4	$-24 + 8 - 5 = -25$
S. $2a - 3ab - 2c - d =$	4	$-18 - 8 - 5 = -27$

4) $5a^2+4b-3c^2-d \quad =20+12-48-5 \quad =-21$

$-3b+2c^2+3d-e^2 \quad =-9+32+15-1 \quad =+37$

$4a^2-c^2+d+ab=16 \quad -16+5+6=+11$

S. $9a^2+b-2c^2+3d-e^2+ab=36+3-32+15-1+6=27$

5) $4ab^2+4b-3a^2-a+e^3 \quad =72+12-12-2+1 \quad =71$

$-3b+2a^2-e^3+3c^2 \quad =-9+8-1+48 \quad =46$

$-3ab^2+4b+3a-c^2 \quad =-54+12+6-16 \quad =-52$

$-ab^2+4a^2-2a-2c^2 \quad =-18+16-4-32 \quad =-38$

$-b+a^2+3d= \quad -3+4+15=16$

S. $4b+4a^2+3d=0+12+16+15=43$

6) $2a^2b+2ab^2-4c+d \quad =24+36-16+5 \quad =49$

$a^2b-ab^2+4d-3bc \quad =12-18+20-36 \quad =-22$

$8a^2b+4ab^2+3c-2c^2 \quad =96+72+12-32 \quad =148$

$-9a^2b-5ab^2+3d+bc-5e \quad =-108-90+15+12-5=-176$

S. $2a^2b-c+8d-2bc-2c^2-5e \quad =24-4+40-24-32-5=-1$

II. Subtraction.

1) Von $a = 2$
soll abgez. werden $a = 2$
$- \quad -$
Unterschied $0 = 0$

2) Von $a = 2$
soll abgez. werden $-a = -2$
$+ \quad +$
Unterschied $2a = 4$

3) Von $4a^2 - 2b = 16 - 6 = 10$
soll abgez. werden $3a^2 + 2b = 12 + 6 = 18$
$- \quad - \quad - \quad - \quad -$
Unterschied $a^2 - 4b = 4 - 12 = -8$

4) Von $2ab^2 - 4b^3 = 36 - 108 = -72$
soll $-7ab^2 + 4b^3 - 2c^2 = -126 + 108 - 32 = -50$
$+ \quad - \quad + \quad + \quad - \quad + \quad +$
Unterschied $9ab^2 - 8b^3 + 2c^2 = 162 - 216 + 32 = -22$

5) $-4ab^2 - 3b + 4c^2 - d + 4e = -72 - 9 + 64 - 5 + 4 = -18$
$-4ab^2 - 4b + 4c^2 - d + 7e = -72 - 12 + 64 - 5 + 7 = -18$
$+ \quad + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad + \quad - \quad + \quad - \quad +$
$b \quad -3e = \quad 3 \quad -3 = 0$

6) $3a^2 - 4ab + 3b^2 - 4b - cd = 12 - 24 + 27 - 12 - 20 = -17$
$2ab - b^2 \quad -cd - 4a^2b = \quad 12 - 9 \quad -20 - 48 = -65$
$- \quad + \quad + \quad + \quad - \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +$
$3a^2 - 6ab + 4b^2 - 4b \quad +4a^2b = 12 - 36 + 36 - 12 \quad +48 = 48$

§. 30.

Multiplication algebraischer Größen.

Man verfahre dabei nach folgenden Regeln.

1) Das Product zweier Größen, die einerlei Zeichen (+ oder —) haben, ist positiv; z. B. $-2a \times -3a = +6a^2$.

2) Das Product zweier Größen, die verschiedene Zeichen haben, ist negativ; z. B. $+2a \times -3a = -6a^2$.

Beide Regeln durch eine ausgedrückt, sagen: gleiche Zeichen geben ein positives, ungleiche ein negatives Product.

3) Die Coefficienten beider Factoren werden, wie in der gemeinen Arithmetik, mit einander multiplicirt.

4) Sind bei beiden Factoren gleiche Buchstaben, so werden ihre Exponenten addirt, der Buchstabe aber im Product nur einmal mit dem summarischen Exponenten gesetzt; z. B. $3a^3 \times 4a^2 = 12a^5$.

5) Die Buchstaben, die beide Factoren nicht gemeinschaftlich haben, werden ohne Veränderung dem Producte der Coefficienten angefügt; z. B. $3a^3bd \times 2a^2bc = 6a^5b^2cd$.

6) Sind beide mit einander zu multiplicirende Größen mehrsätzig, so sehe man die, welche die wenigsten Glieder hat, als den Multiplicator an und multiplicire mit jedem einzelnen Gliede desselben den ganzen Multiplicandus. Hierbei ist es ganz gleichgültig, welches von den Gliedern des Multiplicators zuerst genommen wird; nur bemerke man, rücksichtlich der mit dem Producte vorzunehmenden Reduction (Addition), daß die gleichnamigen Glieder unter einander gesetzt und dann nach §. 28 addirt werden.

Die folgenden 9 Aufgaben, wo bei den sieben ersten die im vorigen §. für die Buchstaben angenommenen Werthe zugleich mit multiplicirt sind, versinnlichen die eben gegebenen Regeln.

1)
$$\begin{array}{rr} & 2a^2bc = 96 \\ \times & ab = 6 \\ \hline & 2a^3b^2c = 576 \end{array}$$

2) $2ab^2 - cd + 4a = 36 - 20 + 8 = 24$
$3bc = 36 = 36$

$6ab^3c - 3bc^2d + 12abc = 1296 - 720 + 288 = 864$

3) $ab - 4c^2 + 3a^2b - d = 6 - 64 + 36 - 5 = 27$
$2b - 3a = 6 - 6 = 0$

$2ab^2 - 8bc^2 + 6a^2b^2 - 2bd - 3a^2b + 12ac^2 - 9a^3b + 3ad = 36 - 384 + 216 - 30 - 36 + 384 - 216 + 30 = 0$

4) $a + b = 2 + 3 = 5$
$a + b = 2 + 3 = 5$

$a^2 + ab = 4 + 6$
$ab + b^2 + 6 + 9$

$a^2 + 2ab + b^2 = 4 + 12 + 9 = 25$

5) $a^2 + 2ab + b^2 = 4 + 12 + 9 = 25$
$a + b = 2 + 3 = 5$

$a^3 + 2a^2b + ab^2 = 8 + 24 + 18$
$a^2b + 2ab^2 + b^3 \quad 12 + 36 + 27$

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 8 + 36 + 54 + 27 = 125$

6) $a + b = 2 + 3 = 5$
$a - b = 2 - 3 = -1$

$a^2 + ab = 4 + 6$
$-ab - b^2 = -6 - 9$

$a^2 - b^2 = 4 - 9 = -5$

7) $a^2 - b^2 = 4 - 9 = -5$
$a + b \quad 2 + 3 = +5$

$a^3 - ab^2 + a^2b - b^3 = 8 - 18 + 12 - 27 = -25$

8) $5a^2 - 4a + b^3 - bc - d^2$

$\times \quad 3a - bc + 2d^2$

$15a^3 - 12a^2 + 3ab^3 - 3abc - 3ad^2$

$+4abc \quad -5a^2bc - b^4c + b^2c^2 + bcd^2$

$-8ad^2 \quad -2bcd^2 + 10a^2d^2 + 2d^2b^3 - 2d^4$

$15a^3 - 12a^2 + 3ab^3 + abc - 11ad^2 - 5a^2bc - b^4c + b^2c^2 - bcd^2 + 10a^2d^2 + 2d^2b^3 - 2d^4$

9)

$4a^3 + 2a^2 + a - 3b + b^2 + 3b^3$

$2a + 3b - 2a^2 - 4b^2$

$8a^4 + 4a^3 + 2a^2 - 6ab + 2ab^2 + 6ab^3$

$+3ab \quad +12a^3b + 6a^2b - 9b^2 + 3b^3 + 9b^4$

$-4a^4 - 2a^3 \quad +6a^2b \quad -8a^5 - 2a^2b^2 - 6a^2b^3$

$-4ab^2 \quad +12b^3 - 4b^4 \quad -8a^2b^2 \quad -16a^3b^2 - 12b^5$

$4a^4 + 2a^3 + 2a^2 - 3ab - 2ab^2 + 6ab^3 + 12a^3b + 12a^2b - 9b^2 + 15b^3 + 5b^4 - 8a^5 - 10a^2b^2 - 6a^2b^3 - 16a^3b^2 - 12b^5$

§. 31.

Division algebraischer Größen.

1) Rücksichtlich der Zeichen gilt hier von dem Quotienten dasselbe, was bei der Multiplication vom Producte galt, nämlich: gleiche Zeichen geben einen positiven, ungleiche aber einen negativen Quotienten; z. B. $4a : 2a = 2$ oder $4a : -2a = -2$.

2) Die Coefficienten werden wie in der gemeinen Arithmetik dividirt.

3) Bei Buchstaben, die dem Divisor und Dividenden gemeinschaftlich sind, wird der Exponent des Divisors von dem Exponenten des Dividenden subtrahirt; haben beide gleich große Exponenten, so verschwindet der Buchstabe ganz aus dem Quotienten. Ist aber der Exponent des Divisors größer, als der Exponent des Dividenden, so wird der Buchstabe mit einem negativen Exponenten im Quotienten gesetzt, oder damit nach Regel 5 verfahren; z. B. $4a^3 : -2a = -2a^2$; oder $6a^2b^3 : 2a^2b = 3b^2$; oder $4a^2 : 2a^3 = 2a^{-1}$; oder $4a^2b : 2ab^4 = 2ab^{-3} = \frac{2a}{b^3}$

4) Die Buchstaben des Dividenden, welche der Divisor nicht hat, werden ohne Veränderung in den Quotienten gesetzt; z. B. $4a^3b^2 : 2a^2 = 2ab^2$; oder $4ab^3c : ab^2 = 4bc$.

5) Hat der Dividend einen Coefficienten, der sich durch den Coefficienten des Divisors nicht ohne Rest theilen läßt, oder ist letzterer größer als ersterer, so wird der Quotient ein Bruch, dessen Zähler der Coefficient des Dividenden, und dessen Nenner der Coefficient des Divisors ist; z. B. $3ab : 2a = \frac{3b}{2}$; oder $2a^2b : 5a^2 = \frac{2b}{5}$; oder $3a^3b^2 : 5a^2b = \frac{3ab}{5}$.

Dasselbe gilt auch von Buchstaben des Divisors, die im Dividenden

entweder nicht, oder doch in einer niederern Potenz stehend, vorkommen; sie werden nämlich ebenfalls im Quotienten als Nenner eines Bruchs gesetzt, dessen Zähler der Dividend ist, und welcher dann durch das Aufsuchen, der, dem Zähler und Nenner gemeinschaftlichen Factoren, nach §. 5 aufgehoben, d. h. auf den möglichst einfachsten Ausdruck gebracht wird; z. B. $3a : 2b = \frac{3a}{2b}$, oder $4a^2b : 2ac = \frac{2ab}{c}$; oder $4a^2b^2 : 3a^3b^3 = \frac{4}{3ab} = \frac{4a^{-1}b^{-1}}{3}$, od. $5a^2b^2 : 10a^2b^3 = \frac{1}{2b} = (2b)^{-1}$; oder $9a^2bc : 3ab^2 = \frac{3ac}{b}$.

6) Bei mehrsätzigen Größen müssen der Dividend und Divisor so geordnet werden, daß die höchsten Potenzen eines, beiden gemeinen, Buchstabens die ersten Glieder bilden, und die Exponenten des Buchstabens, wonach geordnet wurde, mit jedem folgenden Gliede immer mehr abnehmen, wie dies vorzüglich aus der dritten der folgenden Aufgaben zu ersehen, bei welcher nach dem Buchstaben a geordnet ist. Ist dies geschehen, so dividire man, unter Beobachtung der bereits gegebenen Regeln, mit dem ersten Gliede des Divisors in das erste Glied des Dividenden und multiplicire mit dem erhaltenen Quotienten den ganzen Divisor nach §. 30. Das so erhaltene Product wird nach §. 28 von dem Dividenden abgezogen und in den Rest abermals mit dem ersten Gliede des Divisors dividirt. Mit dieser Operation wird so lange fortgefahren, bis man keinen Rest mehr hat, oder der Buchstabe, nach welchem geordnet wurde: nicht mehr im Dividenden erscheint, in welchem Falle bei der Division ein Rest bleibt, man mag selbige auch noch so weit fortsetzen.

Anmerk. In den mehresten Fällen wird die algebraische Division nur angezeigt; damit jedoch der Anfänger im Stande ist, die Richtigkeit ihrer Resultate leicht einzusehen, so sind von den folgenden 8 Aufgaben die ersten 4, Proben auf die 2te, 3te, 5te und 6te Aufgabe der Multiplications-Aufgaben des vorigen §.; die dort erhaltenen Producte sind nämlich hier durch den einen Factor dividirt, der Quotient muß dann = dem andern Factor sein.

1) $6ab^3c-3bc^2d+12abc : 3bc = 3bc \mid 6ab^3c-3bc^2d+12abc \mid 2ab^2-cd+4a$, Quotient.

$6ab^3c-3bc^2d+12abc$

$6ab^3c-3bc^2d+12abc$

$- \quad + \quad -$

2) $2b-3a \mid 2ab^2-8bc^2+6a^2b^2-2bd-3a^2b+12ac^2-9a^3b+3ad \mid ab-4c^2+3a^2b-d$, Quotient.

$2ab^2$

$-$

$-8bc^2$

$+$

$+6a^2b^2$

$-$

$-2bd$

$+$

$-3a^2b$

$+$

$+12ac^2$

$-$

$-9a^3b$

$+$

$+3ad$

$-$

3) $a^2+2ab+b^2 \mid a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \mid a+b$, Quot.

$a^3+2a^2b+ab^2$

$- \quad - \quad -$

$a^2b+2ab^2+b^3$

$a^2b+2ab^2+b^3$

4) $a+b \mid a^2-b^2 \mid a-b$, Quotient.

a^2+ab

$- \quad -$

$-ab-b^2$

$-ab-b^2$

$+ \quad +$

5) $6ab-2b \mid 18a^3+3a^2b-6a^2-ab-24ab^2+6abc+8b^2-2bc \mid \frac{3a^2}{b}+\frac{a}{2}-4b+c$

$18a^3 \quad -6a^2 \quad -24ab^2 \quad +8b^2$

$- \quad + \quad + \quad -$

$3a^2b$

$3a^2b \quad -ab \qquad 6abc \quad -2bc$

$- \quad + \qquad 6abc \quad -2bc$

$- \quad + \qquad - \quad +$

6) $3a^2b^2-2ab^2+ab \mid 12a^3b+4a^2+3a^2b^2c^2-8a^2b-3ab^3+abc^2-2ab^2c^2-b^2+2b^3 \mid \frac{4a}{b}+c^2-\frac{b}{a}$

$12a^3b+4a^2 \qquad -8a^2b$

$- \quad - \qquad +$

$3a^2b^2c^2 \qquad +abc^2-2ab^2c^2$

$- \qquad - \quad +$

$-3ab^3 \qquad -b^2+2b^3$

$-3ab^3 \qquad -b^2+2b^3$

$+ \qquad + \quad -$

7) $a^2 - ab - b^2 \;\big|\; a^5 - a^3b^2 - 3a^2b^3 + b^5 \;\big|\; a^3 + a^2b + ab^2 - b^3$

$a^5 - a^4b - a^3b^2$

$- \quad + \quad +$

$a^4b \quad . \quad -3a^2b^3$

$a^4b - a^3b^2 - a^2b^3$

$- \quad + \quad +$

$a^3b^2 - 2a^2b^3$

$a^3b^2 - a^2b^3 - ab^4$

$- \quad + \quad +$

$- a^2b^3 + ab^4 + b^5$

$- a^2b^3 + ab^4 + b^5$

$+ \quad - \quad -$

. . .

8) $b^2a^{-1} - 3b^3a^{-2} \;\big|\; a^2b + a - 4ab^2 - 3b + 3b^3 \;\big|\; a^3b^{-1} + a^2b^{-2} - a^2 = \frac{a^3}{b} + \frac{a^2}{b^2} - a^2$

oder $\frac{b^2}{a} - \frac{3b^3}{a^2}$

$a^2b \quad -3ab^2$

$- \quad +$

$+a - ab^2 - 3b$

$- \quad - ab^2 \quad +$

$. \quad + \quad . \quad +3b^3$

$. \quad . \quad \pm 3b^3$

.

Anm. Die 8te Aufgabe gehört eigentlich unter das folgende Kapitel, weil im Divisor Brüche vorkommen; sie steht aber hier als Vergleich, daß jede gebrochene Größe, als eine ganze, mit negativen Exponenten ausgedrückt werden kann. S. d. f. Kap.

Drittes Kapitel.

Rechnungen mit algebraischen gebrochenen Größen.

§. 32.

Soll eine gleichnamige Größe durch eine andre gleichnamige dividirt werden, so kann diese Division nach §. 31 nur dann wirklich statt finden, wenn der Coefficient der erstern durch den Coefficienten der letztern ohne Rest theilbar und zugleich der Exponent der gemeinschaftlichen Buchstaben im Dividenden größer ist, als der Exponent im Divisor; widrigenfalls kann die Division nur angezeigt werden, und es entstehen dann algebraische Brüche. So können z. B. $4a^4 : 2a^2 = 2a^2$, oder $6a^2bc : 3ab = 2ac$ wirklich ohne Rest dividirt werden; dagegen sind $4a^4 : 3a^2 = \frac{4a^4}{3a^2} = \frac{4a^2}{3}$, oder $6a^2b^3 : 5a^4b = \frac{6a^2b^3}{5a^4b} = \frac{6b^2}{5a^2}$, algebraische Brüche.

Eben so würde die Division nur angezeigt werden können, und folglich Brüche entstehen, wenn der Divisor Buchstaben enthielt, die im Dividenden nicht stehen; z. B. $a : b = \frac{a}{b}$; $4a^2b : 2ab^2c = \frac{2a}{bc}$.

Die dritte Art algebraischer Brüche ist die, wo bei der Division zweier Größen, von denen wenigstens der Dividend eine mehrsätzige Größe ist, zuletzt ein Rest bleibt, der, wie in der gemeinen Arithmetik (§. 1), dem Quotienten in Form eines Bruches angehangen wird.

Da bei der Division algebraischer Größen, nach §. 31, die Exponenten der gleichnamigen Buchstaben dergestalt von einander subtrahirt werden, daß der Exponent des Divisors von jenem des Dividenden abgezogen wird; so kann dieses Abziehen auch dann

fortgesetzt werden, wenn der Exponent des Divisors größer, als der des Dividenden seyn sollte, und der Unterschied beider wird in diesem Falle negativ ausfallen. Es sind z. B. $a^3 : a^4$ $= \frac{a^3}{a^4} = a^{-1} = \frac{1}{a}$, oder $6ab^2 : 2a^2b = 3a^{-1}b = \frac{3b}{a}$, oder $4a^2b : 3a^3c = \frac{4a^{-1}bc^{-1}}{3} = \frac{4b}{3ac}$.

Man erhält hierdurch ein Mittel, jeden algebraischen Bruch als eine ganze Größe darzustellen, wenn man nämlich

1) die Coefficienten wie gewöhnlich dividirt, oder, im Fall dies nicht ohne Rest geht, doch nach §. 5 verkleinert;
2) die Exponenten der, dem Divisor und Dividenden gemeinen Buchstaben nach §. 31 und auf die vorbeschriebene Art subtrahirt, und
3) die Buchstaben des Divisors, die dem Dividenden nicht gemein sind, mit negativen Exponenten als Factoren im Quotienten schreibt.

Folgende Beispiele zeigen die Anwendung der eben gegebenen Regeln.

1) $4a^2 : 2a^3b = \frac{4a^2}{2a^3b} = 2a^{-1}b^{-1}$

2) $3ab : 2a^2 = \frac{3ab}{2a^2} = \frac{3b}{2a} = \frac{3ba^{-1}}{2}$

3) $4b^2c : abc^2 = \frac{4b^2c}{abc^2} = 4a^{-1}bc^{-1}$

4) $3a^2b^2 : 9a^3c = \frac{3a^2b^2}{9a^3c} = \frac{a^{-1}b^2c^{-1}}{3}$

5) $12a^4b^2c : 9a^2b^3d = \frac{12a^4b^2c}{9a^2b^3d} = \frac{4a^2b^{-1}cd^{-1}}{3}$

6) $6a^2b^2c^2 : 3a^4b^3c^2d = \frac{6a^2b^2c^2}{3a^4b^3c^2d} = 2a^{-2}b^{-1}d^{-1}$

§. 33.

Die Regeln zur Ausübung der vier Rechnungsarten mit algebraischen gebrochenen Größen können entweder gleichartig mit den im ersten Kapitel bei den gemeinen Brüchen gegebenen, jedoch in Verbindung mit den im vorigen Kapitel enthaltenen Regeln begründet werden — oder sämmtliche Brüche können nach vorigem §. in ganze Größen mit negativen Exponenten verwandelt und mit denselben nach den im zweiten Kapitel dieses Abschnittes enthaltenen Anweisungen verfahren werden.

Da jedoch dem Anfänger die erstere Art der Berechnungen, wegen ihrer Aehnlichkeit mit denen im ersten Kapitel vorigen Abschnitts, geläufiger seyn wird, so wählen wir dieselbe bei Auflösung der folgenden Aufgaben, und berechnen die zwei ersten jeder Rechnungsart allemal doppelt, nämlich nach beiden Methoden.

§. 34.

Addition und Subtraction.

(Reductionen, durch das Vereinigen der Brüche unter einem gemeinschaftlichen Nenner.)

1) Man findet den Generalnenner (§. 3), wenn man alle Nenner der gegebenen Brüche absetzt, beobachtet, ob einer in dem andern ohne Rest aufgeht, ersteren wegstreicht, die übriggebliebenen aber durch einen gemeinschaftlichen Factor (Buchstaben oder Coefficienten) dividirt, und die Quotienten sowohl, als die angewandten Divisoren, algebraisch durch einander multiplicirt.

2) Hierauf setze man die gegebenen gebrochenen Größen so an, wie dies in §. 4 gelehrt ward, verfahre dann ganz so, wie dort, und addire endlich die hinter dem zweiten Striche stehenden Producte nach §. 29, oder subtrahire dieselben, je nachdem es Additions- oder Subtractionsaufgaben sind.

1) Es sind zu addiren: $\frac{3a}{4b^2}\ \frac{5a^2}{6c}\ -\frac{3b^3}{4b}\ \frac{3ab^2}{4c}$

$12b^2c$

$+\frac{3a}{4b^2}$	$3c$	$+9ac$
$+\frac{5a^2}{6c}$	$2b^2$	$+10a^2b^2$
$-\frac{3b^3}{4b}$	$3bc$	$-9b^4c$
$+\frac{3ab^2}{4c}$	$3b^2$	$+9ab^4$

$4b^2 \quad 6c \quad 4b \quad 4c$

2) $4b^2 \quad 6c$

$2b^2 \times 3c = 6b^2c$

$\times 2$

Generalnenn. $= 12b^2c$

Summe $= \frac{9ac+10a^2b^2-9b^4c+9ab^4}{12b^2c}$

$=$

oder:

12

$+\frac{3ab^{-2}}{4}$	3	$+9ab^{-2}$
$+\frac{5a^2c^{-1}}{6}$	2	$+10a^2c^{-1}$
$-\frac{3b^2}{4}$	3	$-9b^2$
$+\frac{3ab^2c^{-1}}{4}$	3	$+9ab^2c^{-1}$

$\frac{9ab^{-2}+10a^2c^{-1}-9b^2+9ab^2c^{-1}}{12}$

2) Es sind zu addiren: $\frac{4b^2}{9a} - \frac{4ab}{3c} \quad \frac{3ab}{5d} - \frac{2b^2}{5a}$

$\overbrace{\qquad\qquad}^{45acd}$

$+\frac{4b^2}{9a}$	$5cd$	$+20b^2cd$
$-\frac{4ab}{3c}$	$15ad$	$-60a^2bd$
$+\frac{3ab}{5d}$	$9ac$	$+27a^2bc$
$-\frac{2b^2}{5a}$	$9cd$	$-18b^2cd$

$\frac{9a \quad 3c \quad 5d \quad 5a}{9a \times c \times 5d = 45acd}$

$=$ dem Generalnenner.

$$\text{Summe} = \frac{2b^2cd - 60a^2bd + 27a^2bc}{45acd} =$$

$\overbrace{\qquad}^{45}$

$+\frac{4b^2a^{-1}}{9}$	5	$+20b^2a^{-1}$
$-\frac{4abc^{-1}}{3}$	15	$-60abc^{-1}$
$+\frac{3abd^{-1}}{5}$	9	$+27abd^{-1}$
$-\frac{2b^2a^{-1}}{5}$	9	$-18b^2a^{-1}$

$$\frac{2b^2a^{-1} - 60abc^{-1} + 27abd^{-1}}{45}$$

3) Es sind zu addiren: $\frac{4a}{bc}$ $\frac{5a}{3c}$ — $\frac{2a}{9b}$ $\frac{5a}{6bc^2}$

$\underbrace{18bc^2}$

$+\frac{4a}{bc}$	$18c$	$+72ac$
$+\frac{5a}{3c}$	$6bc$	$+30abc$
$-\frac{2a}{9b}$	$2c^2$	$-4ac^2$
$+\frac{5a}{6bc^2}$	3	$+15a$

$bc \quad 3c \quad 9b \quad 6bc^2$

3) $9 \quad 6bc^2$

$3 \quad 2bc^2$

$3 \times 3 \times 2bc^2 = 18bc^2 =$ dem Generalnenner.

$$\text{Summe} = \frac{72ac + 30abc - 4ac^2 + 15a}{18bc^2}$$

4) Es sind $\frac{4a}{3b} + \frac{a-3b}{cd} + \frac{a^2-b^2-ab}{bcd}$ unter gleichen Nenner zu bringen.

$\underbrace{3bcd}$

$+\frac{4a}{3b}$	cd	$+4acd$
$+\frac{a-3b}{cd}$	$3b$	$+3ab-9b^2$
$+\frac{a^2-b^2-ab}{bcd}$	3	$+3a^2-3b^2-3ab$

$3b \quad cd \quad bcd$

$3 \times bcd = 3bcd$ = dem Generaln.

$$\text{Summe} = \frac{4acd+3ab-9b^2+3a^2-3b^2-3ab}{3bcd} =$$

5) Es sind $a + 4b^2 - \frac{b}{a} + \frac{4a-b}{b} + \frac{3a^2b-c}{3a} - \frac{4b^2}{a^2} =$

$$\frac{3a^3b+12a^2b^3-3ab^2+12a^3-3a^2b+3a^3b^2-abc-12b^3}{3a^2b}$$

6) Es sind $\frac{a^2-ab-b^2}{3a} - \frac{8b^2+a^2}{4a^2b} + \frac{3a^3}{b^2a^2} - \frac{a^2+ab+b^2}{3a} + \frac{4b^2-a}{6b^2} =$

$\frac{(4a^3b^2-4a^2b^3-4ab^4)-(24b^3+3a^2b)+36a^3-(4a^3b^2+4a^2b^3+4ab^4)+(8a^2b^2-2a^3)}{12a^2b^2} =$

$\frac{4a^3b^2-4a^2b^3-4ab^4-24b^3-3a^2b+36a^3-4a^3b^2-4a^2b^3-4ab^4+8a^2b^2-2a^3}{12a^2b^2} =$

$\frac{34a^3-24b^3-3a^2b+8a^2b^2}{12a^2b^2}$

7) Von der Größe $\frac{4a}{b^2}$ soll die Größe $\frac{3a}{4b}$ abgezogen werden.

$$\begin{array}{l|l|l} + \frac{4a}{b^2} & \overbrace{4b^2} & + 16a \\ + \frac{3a}{4b} & b & \pm 3ab \\ \hline \text{Differenz} = \frac{16a-3ab}{4b^2} & & \end{array}$$

$\frac{b^2 \quad 4b}{4 \times b^2 = 4b^2} =$ dem Generaln.

8) Von der Größe $\frac{4a^2}{b} + \frac{3ab}{c} - \frac{4b}{3c}$ soll die Größe $\frac{5a^2}{6b} - \frac{5ab}{4c} - \frac{3b}{2c}$ abgezogen werden.

$$\underbrace{12bc}$$

$+\frac{4a^2}{b}$	$12c$	$+48a^2c$
$+\frac{3ab}{c}$	$12b$	$+36ab^2$
$-\frac{4b}{3c}$	$4b$	$-16b^2$
$+\frac{5a^2}{6b}$	$2c$	$\pm 10a^2c$ *
$-\frac{5ab}{4c}$	$3b$	$\mp 15ab^2$
$-\frac{3b}{2c}$	$6b$	$\mp 18b^2$

$$\text{Differenz} = \frac{38a^2c + 51ab^2 + 2b^2}{12bc}$$

$\begin{array}{cccccc} b & c & 3c & 6b & 4c & 2c \\ \hline 2) & & 3b & & 2c & \end{array}$ also

$3b \times 2c \times 2 = 12bc =$ dem Generalnenner.

Anmerk. Da die letzten drei Größen von den ersten Dreien (jede zusammengesetzte Größe als aus drei einfachen bestehend, gedacht) abgezogen werden sollen, so müssen bei ihnen nach §. 29 die Zeichen gewechselt werden.

9) Von der Größe $\frac{5a}{b} + \frac{4a^2 - b}{3a} + 6b - a$ soll abgezogen werden $\frac{3b}{2b} - \frac{5b+4c}{a}$

$$\underbrace{6ab}$$

$+\frac{5a}{b}$	$6a$	$+30a^2$
$+\frac{4a^2-b}{3a}$	$2b$	$+8a^2b-2b^2$
$+\frac{6b-a}{1}$	$6ab$	$+36ab^2-6a^2b$
$+\frac{3a}{2b}$	$3a$	$\pm 9a^2$
$-\left(\frac{5b+4c}{a}\right)$	$6b$	$\mp(30b^2+24bc)$

$$\text{Differenz} = \frac{21a^2 + 2a^2b + 28b^2 + 36ab^2 + 24bc}{6ab}$$

$\begin{array}{cccc} b & 3a & 2b & a \\ \hline \end{array}$

$3a \times 2b = 6ab =$ dem Generalnenner.

§. 35.

Multiplication gebrochener algebraischer Größen.

1) Sind beide Factoren einfache Größen, so verfahre man, mit Berücksichtigung der im §. 30 gegebenen Regeln, ganz so, wie es bei der Multiplication der gemeinen Brüche gelehrt ward, wobei besonders das Aufsuchen gemeinschaftlicher Factoren im Nenner und Zähler nicht außer Acht zu lassen ist.

2) Ist ein Factor eine zusammengesetzte Größe, so setze man jedes einzelne Glied desselben (nach 1) mit dem andern einfachen Factor besonders an, und verbinde sodann die einzelnen, also erhaltenen Producte durch die ihnen zukommenden Zeichen. Oder man bringe sämmtliche Größen des zusammengesetzten Factors auf gleichen Nenner, betrachte denselben sodann als ein Glied und verfahre mit ihm nach 1.

3) Sind beide Factoren zusammengesetzte Größen, so bringe man bei jedem die einzelnen Glieder auf gleiche Nenner, sehe sodann, ob in einem der beiden Nenner Factoren enthalten, die in einem der beiden zusammengesetzten Zähler allen Gliedern gemeinschaftlich sind, hebe dieselben und multiplicire hierauf die beiden Zähler und Nenner nach §. 30 mit einander, so erhält man in dem Producte der ersteren, dividirt durch das Product der letzteren, das Product der gegebenen zwei Factoren.

1) $\frac{3ab}{4c^2} \times \frac{5c^2d}{6a^2b} = \frac{1}{4} \times \frac{5d}{2a} = \frac{5d}{8a}$ (gemeinschaftl. Factoren sind hier: $3ab$ und c^2)

2) $\frac{4a^2b^2}{7c^3d^3} \times \frac{7c^3d^2}{6a^2b^3} = \frac{2}{d} \times \frac{c}{3b} = \frac{2c}{3bd}$ (gemeinschaftl. Factoren sind hier: $2a^2b^2$ und $7c^2d^2$)

Eben so würde

$\frac{4a^2b^2c^{-2}d^{-3}}{7} \times \frac{7c^3d^2a^{-2}b^{-3}}{6} = \frac{28b^{-1}cd^{-1}}{42} =$

$\frac{2b^{-1}cd^{-1}}{3} = \frac{2c}{3bd}$; denn $a^2 \times a^{-2} = a^0 = 1$; $b^2 \times b^{-3} = b^{-1}$; $c^{-2} \times c^3 = c$; und $d^{-3} \times d^2 = d^{-1}$

3) $\frac{4a^2bx}{5c^2d^2} \times \frac{5c^3d^2}{2a^2x} = 2b \times c = 2bc$ (gemeinschaftliche Factoren sind hier: $2a^2x$ und $5c^2d^2$)

4) $\left(4a^2 + \frac{5b}{c^2} - \frac{3a}{4b}\right) \times \frac{3c^3}{8a^2}$

Erste Methode.

Es ist: $\frac{4a^2}{1} \times \frac{3c^3}{8a^2} = \frac{3c^3}{2}$

$\frac{5b}{c^2} \times \frac{3c^3}{8a^2} = \frac{15bc}{8a^2}$

$-\frac{3a}{4b} \times \frac{3c^3}{8a^2} = -\frac{9c^3}{32ab}$

und diese drei Brüche nach vorigem §. unter gleiche Nenner gebracht, gibt

$\frac{3c^3}{2} + \frac{15bc}{8a^2} - \frac{9c^3}{32ab} = \frac{48a^2bc^3 + 60b^2c - 9ac^3}{32a^2b}$

Zweite Methode.

Es ist: $4a^2 + \frac{5b}{c^2} - \frac{3a}{4b} = \frac{16a^2bc^2 + 20b^2 - 3ac^2}{4bc^2}$

u. $\frac{16a^2bc^2 + 20b^2 - 3ac^2}{4bc^2} \times \frac{3c^3}{8a^2} = \frac{16a^2bc^2 + 20b^2 - 3ac^2}{4b}$

$\times \frac{3c}{8a^2} = \frac{48a^2bc^3 + 60b^2c - 9ac^3}{32a^2b}$

5) $\left(\frac{6a^2}{5b} - \frac{4b^2}{3c} + \frac{3c^3}{4a^2} - \frac{a^3}{2c^2}\right) \times -\frac{4a}{9c^2} =$

$$\frac{30a^5b - 45bc^5 + 80a^2b^3c - 72a^4c^2}{135abc^4}$$

6) $\left(4a^2b - \frac{3b^2}{4c^2} + \frac{4b^2c}{3a^2}\right) \times \left(\frac{3c^3}{a^2} - \frac{3a^2}{4b^2}\right)$ Es ist $4a^2b - \frac{3b^2}{4c^2} + \frac{4b^2c}{3a^2} = \frac{48a^4bc^2 - 9a^2b^2 + 16b^2c^3}{12a^2c^2} =$

$\frac{b(48a^4c^2 - 9a^2b + 16bc^3)}{12a^2c^2}$ Eben so ist $\frac{3c^3}{a^2} - \frac{3a^2}{4b^2} =$

$\frac{12b^2c^3 - 3a^4}{4a^2b^2} = \frac{3(4b^2c^3 - a^4)}{4a^2b^2}$, und nun ist

$\frac{b(48a^4c^2 - 9a^2b + 16bc^3)}{12a^2c^2} \times \frac{3(4b^2c^3 - a^4)}{4a^2b^2} =$

$\left(\frac{48a^4c^2 - 9a^2b + 16bc^3}{4a^2c^2}\right) \times \left(\frac{4b^2c^3 - a^4}{4a^2b}\right) =$

$$\frac{192a^4b^2c^5 - 36a^2b^3c^3 + 64b^3c^6 - 48a^8c^2 + 9a^6b - 16a^4bc^3}{16a^4bc^2}$$

7) $\left(\frac{4a}{3b} - \frac{3b^2}{c} + \frac{4c^2}{3b}\right) \times \left(\frac{3a}{c^2} - 2a^2\right) = \frac{4a^2}{bc^2} -$

$\frac{9ab^2}{c^3} + \frac{4a}{b} - \frac{8a^3}{3b} + \frac{6a^2b^2}{c} - \frac{8a^2c^2}{3b} =$

$$\frac{12a^2c - 27ab^3 + 12ac^3 - 8a^3c^3 + 18a^2b^3c^2 - 8a^2c^5}{3bc^3}$$

8) $\left(\frac{4c^3}{3a^2} - \frac{5ac}{6b^2} + \frac{2bc}{9a}\right) \times \left(\frac{3a^3}{c^2} - 6a^2\right) = 4ac -$

$\frac{5a^4}{2b^2c} + \frac{2a^2b}{3c} - 8c^3 + \frac{5a^3c}{b^2} - \frac{4abc}{3} =$

$$\frac{24ab^2c^2 - 15a^4 + 4a^2b^3 - 48b^2c^4 + 30a^3c^2 - 8ab^3c^2}{6b^2c}$$

§. 36.

Division gebrochener algebraischer Größen.

1) Sind Divisor und Dividend einfache Größen, so verfahre man ganz nach Regel 1 bei der Multiplication, wende jedoch den Divisor, ehe man die gemeinschaftlichen Factoren aufsucht, dergestalt um, daß sein Nenner zum Zähler und sein Zähler zum Nenner wird.

2) Ist der Dividend eine zusammengesetzte Größe, so dividire man entweder jedes einzelne Glied desselben nach Regel 1 durch den Divisor, oder man bringe den Dividenden auf gleiche Nenner, betrachte ihn dann als einfachen Bruch und verfahre mit selbigem nach Regel 1.

3) Sind Divisor und Dividend zusammengesetzte Größen, so bringe man beide auf gleiche Nenner, betrachte selbige dann als einfache Brüche und behandle sie ebenfalls nach Regel 1; oder man dividire nach §. 31 mit dem ersten Gliede des Divisors in das erste Glied des Dividenden, und verfahre, unter Berücksichtigung des hier und im vorigen §. unter 1 Gesagten, mit dem erhaltenen ersten Gliede des Quotienten nach den dort (§. 31) gegebenen Regeln. Auf dieselbe Art erhält man auch die übrigen Glieder des Quotienten, indem man immer mit dem ersten Glied des Divisors in das folgende des Dividenden dividirt.

Damit der Anfänger die Richtigkeit der Resultate leicht einsehen könne, stehen hier die Proben auf die Multiplicationsaufgaben Nr. 1, 4 und 7 unter denselben Nummern.

1) $\frac{5d}{8a} : \frac{5c^2d}{6a^2b} = \frac{5d}{8a} \times \frac{6a^2b}{5c^2d} = \frac{1}{4} \times \frac{3ab}{c^2} = \frac{3ab}{4c^2}$

Eben so würde $\frac{5d}{8a} : \frac{5c^2d}{6a^2b} = \frac{5da^{-1}}{8} : \frac{5c^2da^{-2}b^{-1}}{6} =$

$\frac{5da^{-1}}{8} \times \frac{6}{5c^2da^{-2}b^{-1}} = \frac{3}{4c^2a^{-1}b^{-1}} = \frac{3ab}{4c^2}$

2) $\frac{3ab^2}{5c^3} : \frac{9a^2b^2}{5c^3d} = \frac{3ab^2}{5c^3} \times \frac{5c^3d}{9a^2b^2} = \frac{1}{1} \times \frac{d}{3a} = \frac{d}{3a}$

Eben so würde $\frac{3ab^2}{5c^3} : \frac{9a^2b^2}{5c^3d} = \frac{3ab^2c^{-3}}{5} : \frac{9a^2b^2c^{-3}d^{-1}}{5}$

$= \frac{3ab^2c^{-3}}{5} \times \frac{5}{9a^2b^2c^{-3}d^{-1}} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{3ad^{-1}} = \frac{d}{3a}$

3) $\frac{5cd^2}{3a^2} : -\frac{4c^3d}{9a} = -\frac{15d}{4ac}$

4) $\left(\frac{3c^3}{2} + \frac{15bc}{8a^2} - \frac{9c^3}{32ab}\right) : \frac{3c^3}{8a^2}$

Erste Methode.

$\frac{3c^3}{2} : \frac{3c^3}{8a^2} = \frac{3c^3}{2} \times \frac{8a^2}{3c^3} = 4a^2$

$\frac{15bc}{8a^2} : \frac{3c^3}{8a^2} = \frac{15bc}{8a^2} \times \frac{8a^2}{3c^3} = \frac{5b}{c^2}$

$-\frac{9c^3}{32ab} : \frac{3c^3}{8a^2} = -\frac{9c^3}{32ab} \times \frac{8a^2}{3c^3} = -\frac{3a}{4b}$

und $4a^2 + \frac{5b}{c^2} - \frac{3a}{4b} = \frac{16a^2bc^2+20b^2-3ac^2}{4bc^2} =$

dem Quotienten.

Zweite Methode.

Es ist $\frac{3c^3}{2} + \frac{15bc}{8a^2} - \frac{9c^3}{32ab} = \frac{48a^2bc^3+60b^2c-9ac^3}{32a^2b}$

und $\frac{48a^2bc^3+60b^2c-9ac^3}{32a^2b} : \frac{3c^3}{8a^2} =$

$\frac{3c(16a^2bc^2+20b^2-3ac^2)}{32a^2b} \times \frac{8a^2}{3c^3} = \frac{16a^2bc^2+20b^2-3ac^3}{4bc^2}$

5) $\left(\frac{8a^5}{5b^6} - \frac{3a}{b} + \frac{18a^2}{5b^3} - \frac{6a^3c^2}{b^4}\right) : \frac{6a^3}{5b^4} = \frac{4a^2}{3b} -$

$\frac{5b^3}{2a^2} + \frac{3b}{a} - 5c^2 = \frac{8a^4-15b^4+18ab^2-30a^2bc^2}{6a^2b}$

6) $$\frac{a}{b^2} - \frac{2b^3}{3a^2} \left| \frac{4a^3}{b^2} - \frac{3a}{c} + \frac{4c}{3ab^2} - \frac{3a^2}{b^3} - \frac{8b^3}{3} + \frac{2b^5}{a^2c} - \frac{8b^3c}{9a^4} + \frac{2b^2}{a} \right| 4a^2 - \frac{3b^2}{c} + \frac{4c}{3a^2} - \frac{3a}{b}$$

$$\frac{4a^3}{b^2}$$
$$-$$
$$\cdot \quad -\frac{3a}{c}$$
$$+$$
$$\cdot \quad +\frac{4c}{3ab^2}$$
$$-$$
$$\cdot \quad -\frac{3a^2}{b^3}$$
$$\cdot$$

$$-\frac{8b^3}{3}$$
$$+$$
$$\cdot \quad +\frac{2b^5}{a^2c}$$
$$-$$
$$\cdot \quad -\frac{8b^3c}{9a^4}$$
$$+$$
$$\cdot \quad +\frac{2b^2}{a}$$
$$\cdot$$

Es ist nämlich $\frac{4a^3}{b^2} : \frac{a}{b^2} = \frac{4a^3}{b^2} \times \frac{b^2}{a} = 4a^2$ das erste, $-\frac{3a}{c} : \frac{a}{b^2} = -\frac{3a}{c} \times \frac{b^2}{a} = -\frac{3b^2}{c}$ das zweite, $+\frac{4c}{3ab^2} : \frac{a}{b^2} = \frac{4c}{3ab^2} \times \frac{b^2}{a} = \frac{4c}{3a^2}$ das dritte, $-\frac{3a^2}{b^3} : \frac{a}{b^2} = -\frac{3a^2}{b^3} \times \frac{b^2}{a} = -\frac{3a}{b}$ das vierte Glied des Quotienten, und mit jedem dieser 4 Glieder den ganzen Divisor multiplicirt und die Producte abgezogen, gibt obiges Beispiel.

7) $\frac{3a}{c^2} - 2a^2 \left| \frac{4a^2}{bc^2} - \frac{9ab^2}{c^3} + \frac{4a}{b} - \frac{8a^3}{3b} + \frac{6a^2b^2}{c} - \frac{8a^2c^2}{3b} \right| \frac{4a}{3b} - \frac{3b^2}{c} + \frac{4c^2}{3b} = \frac{4ac - 9b^3 + 4c^2}{3bc}$

$$\begin{array}{l} \frac{4a^2}{bc^2} \\ \hline \cdot \end{array} \quad \begin{array}{l} -\frac{9ab^2}{c^3} \\ \hline \cdot \end{array} \quad + \frac{4a}{b} \quad \begin{array}{l} -\frac{8a^3}{3b} \\ \hline \cdot \end{array} \quad + \frac{6a^2b^2}{c} \quad \begin{array}{l} -\frac{8a^2c^2}{3b} \\ \hline \cdot \end{array}$$

Es ist nämlich:

$\frac{4a^2}{bc^2} : \frac{3a}{c^2} = \frac{4a}{3b}$ = dem ersten Gliede des Quot., und $\left(\frac{3a}{c^2} - 2a^2\right) \times \frac{4a}{3b} = \frac{4a^2}{bc^2} - \frac{8a^3}{3b}$

$-\frac{9ab^2}{c^3} : \frac{3a}{c^2} = -\frac{3b^2}{c}$ = dem zweiten Gliede des Quot., u. $\left(\frac{3a}{c^2} - 2a^2\right) \times -\frac{3b^2}{c} = -\frac{9ab^2}{c^3} + \frac{6a^2b^2}{c}$

$\frac{4a}{b} : \frac{3a}{c^2} = \frac{4c^2}{3b}$ = dem dritten Gliede des Quot., und $\left(\frac{3a}{c^2} - 2a^2\right) \times \frac{4c^2}{3b} = \frac{4a}{b} - \frac{8a^2c^2}{3b}$

8) $\frac{5a}{4} - 3b + \frac{3c}{2} \Big| \frac{15a^2}{2} - \frac{113ab}{6} + 9ac + 2b^2 - bc \Big| 6a - \frac{2b}{3} = \frac{18a - 2b}{3}$

$$\frac{\frac{15a^2}{2} - \frac{108ab}{6} + 9ac}{\frac{-\quad +\quad -}{-\frac{5ab}{6} \quad + 2b^2 - bc}}$$

$$\frac{-\frac{5ab}{6} \quad + 2b^2 - bc}{+\qquad -\quad +}$$

Hier erhielt man beim Productmachen mit dem ersten Gliede des Quotienten $\frac{15a^2}{2} - 18ab + 9ac$; um nun die $18ab$ von dem gleichnamigen Gliede $\frac{113ab}{6}$ subtrahiren zu können, mußten selbige erst zu Sechsteln gemacht werden; es sind nämlich $-\frac{18ab}{1} \times \frac{6}{6} = -\frac{108ab}{6}$.

9) $\frac{a^2}{b^3}-\frac{2c^3d^4}{b^5}+\frac{7c^2}{2a^4b^3}\,\Big|\,\frac{a^4}{b^6}-\frac{4c^6d^8}{b^{10}}+\frac{14c^5d^4}{a^4b^8}-\frac{49c^4}{4a^8b^6}\,\Big|\,\frac{a^2}{b^3}+\frac{2c^3d^4}{b^5}-\frac{7c^2}{2a^4b^3}=\frac{2a^6b^2+4a^4c^3d^4-7b^2c^2}{2a^4b^5}$

$$\frac{a^4}{b^6}-\frac{2a^2c^3d^4}{b^8}+\frac{7c^2}{2a^2b^6}$$

$$-\quad+\qquad-$$

$$\frac{2a^2c^3d^4}{b^8}-\frac{4c^5d^8}{b^{10}}+\frac{14c^5d^4}{a^4b^8}-\frac{7c^2}{2a^2b^6}-\frac{49c^4}{4a^8b^6}$$

$$\frac{2a^2c^3d^4}{b^8}-\frac{4c^6d^8}{b^{10}}+\frac{7c^5d^4}{a^4b^8}$$

$$-\qquad+\qquad-$$

$$\frac{7c^5d^4}{a^4b^8}-\frac{7c^2}{2a^2b^6}-\frac{49c^4}{4a^8b^6}$$

$$\frac{7c^5d^4}{a^4b^8}-\frac{7c^2}{2a^2b^6}-\frac{49c^4}{4a^8b^6}$$

$$-\qquad+\qquad+$$

Bei der vorstehenden Aufgabe ist $\frac{a^4}{b^6}:\frac{a^2}{b^3}=\frac{a^2}{b^3}$ das erste Glied des Quotienten, und dieses mit dem Divisor multiplicirt, gibt $\frac{a^4}{b^6}-\frac{2a^2c^3d^4}{b^8}+\frac{7c^2}{2a^2b^6}$ zum Product. Da sich zu den beiden letzten Gliedern keine gleichnamigen im Dividenden fanden, so mußten sie mit verwechselten Zeichen in Rest gesetzt werden. Da ferner die Division nach a angeordnet ist, so mußte nun das herabgesetzte Glied $+\frac{2a^2c^3d^4}{b^8}$ und alsdann das Glied $-\frac{7c^2}{2a^2b^6}$ mit dem ersten Gliede des Divisors dividirt werden, weil in dem letzteren Gliede a in einer höheren Potenz, als in dem vor selbigem stehenden Gliede $\frac{7c^5d^4}{a^4b^8}$ steht; hier steht nämlich a in der — 4ten und dort in der — 2ten Potenz.

10) $\left(\frac{a^7b^2}{5}-\frac{47a^6b^3}{40}+\frac{9a^5b^4}{2}-12a^4b^5\right):\left(\frac{a^4}{2}-2a^3b\right)$

$=\frac{2a^3b^2}{5}-\frac{3a^2b^3}{4}+6ab^4=\frac{8a^3b^2-15a^2b^3+120ab^4}{20}$

11) $\left(\frac{a^3b}{x^5}+\frac{a^4b}{x^4}+\frac{7a^5b}{x^3}-\frac{3a^6b}{x^2}+\frac{a^2b^3}{x^2}-\frac{2a^3b^3}{x}-a^4b^3\right)$

$:\left(\frac{a^2b}{x^2}-\frac{2a^3b}{x}-a^4b\right)=\frac{a}{x^3}+\frac{3a^2}{x^2}+b^2=$

$\frac{a+3a^2x+b^2x^3}{x^3}$

12) $\left(4ac-\frac{5a^4}{2b^2c}+\frac{2a^2b}{3c}-8c^3+\frac{5a^3c}{b^2}-\frac{2abc}{3}\right):$

$\left(\frac{3a^3}{c^2}-6a^2\right)=\frac{4c^3}{3a^2}-\frac{5ac}{6b^2}+\frac{2bc}{9a}$

§. 37.

Dividirt man bei einem algebraischen Bruche den Zähler durch seinen Nenner, so erhält man in dem Quotienten eine Anzahl Glieder, die, nach einem leicht ins Auge fallenden Gesetze, zwar bis ins Unendliche vermehrt werden können, dem Werthe des Bruches aber nie ganz gleich kommen (man vergleiche hiermit §. 10). In einigen Fällen nähert sich die Summe dieser Glieder dem Werthe des Bruches zwar immer mehr (s. Aufgabe 5), in andern Fällen aber weicht solche immer mehr

von diesem Werthe ab (s. Aufgabe 1), je mehr nämlich Glieder entwickelt werden.

Von den folgenden Aufgaben versinnlichen besonders die 1ste und 5te die eben gegebenen Erklärungen.

1) $\frac{a}{1+b} = 1+b \mid a \mid a - ab + ab^2 - ab^3 + ab^4$ u. s. f.

$$a + ab$$
$$- \quad -$$
$$\hline$$
$$\cdot \quad -ab$$

$$-ab \quad -ab^2$$
$$+ \quad +$$
$$\hline$$
$$: \quad ab^2$$

$$ab^2 + ab^3$$
$$- \quad -$$
$$\hline$$
$$: \quad -ab^3$$

$$-ab^3 \quad -ab^4$$
$$+ \quad +$$
$$\hline$$
$$ab^4$$

$$ab^4 + ab^5$$
$$- \quad -$$
$$\hline$$
$$-ab^5$$

Wird $a = 2$ und $b = 3$ gesetzt, so ist $\frac{a}{1+b} = \frac{2}{4}$ $= \frac{1}{2}$, und die entwickelten 5 Glieder des Quotienten wären: $2 - 6 + 18 - 54 + 162 = 122$; dazu den Rest $-\frac{ab^5}{1+b} = -\frac{486}{4} = -121\frac{1}{2}$ addirt, gibt in $122 - 121\frac{1}{2}$ $= \frac{1}{2}$ den Bruch.

2) $\frac{a}{1-b} = a + ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \ldots$

3) $\frac{a}{b-1} = \frac{a}{b} + \frac{a}{b^2} + \frac{a}{b^3} + \frac{a}{b^4} + \ldots$

4) $\frac{a}{b+1} = \frac{a}{b} - \frac{a}{b^2} + \frac{a}{b^3} + \frac{a}{b^4} + \ldots$

5) $\frac{a+b}{c+b} = c+b \,\Big|\, a+b \,\Big|\, \frac{a}{c} - \frac{b(a-c)}{c^2} + \frac{b^2(a-c)}{c^3} - \frac{b^3(a-c)}{c^4} + \ldots$

$$a + \frac{ab}{c}$$

$$+b - \frac{ab}{c} = -\frac{b(a-c)}{c}$$

$$-\frac{b(a-c)}{c} - \frac{b^2(a-c)}{c^2}$$

$$+ \qquad +$$

$$\frac{b^2(a-c)}{c^2}$$

$$\frac{b^2(a-c)}{c^2} + \frac{b^3(a-c)}{c^3}$$

$$- \qquad -$$

$$-\frac{b^3(a-c)}{c^3}$$

$$-\frac{b^3(a-c)}{c^3} - \frac{b^4(a-c)}{c^4}$$

$$+ \qquad +$$

$$+\frac{b^4(a-c)}{c^4}$$

Würde hier $a = 2$, $b = 3$ und $c = 4$ angenommen, so wäre der Bruch $\frac{a+b}{c+b} = \frac{2+3}{4+3} = \frac{5}{7} = 0{,}714..$; die 4 Glieder des Quotienten aber wären $= \frac{2}{4} - \frac{3(2-4)}{4^2} +$

$\frac{3^2(2-4)}{4^3} - \frac{3^3(2-4)}{4^4} = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{9}{32} + \frac{27}{128} = \frac{103}{128}$

$= 0{,}804..$; nimmt man von dieser Reihe noch das 5te Glied, $-\frac{81}{512}$, so würde der Quotient $= \frac{323}{512} = 0{,}646...$ Der erstere Quotient ist um 0,09 zu groß, der letztere um 0,068 zu klein; man nähert sich aber dem wahren Quotienten um desto mehr, je mehr Glieder man entwickelt.

6) $\frac{a+b}{c-b} = \frac{a}{c} + \frac{b(a+c)}{c^2} + \frac{b^2(a+c)}{c^3} + \frac{b^3(a+c)}{c^4} + \ldots$

7) $\frac{a-b}{c-b} = \frac{a}{c} + \frac{b(a-c)}{c^2} + \frac{b^2(a-c)}{c^3} + \frac{b^3(a-c)}{c^4} + \ldots$

8) $\frac{b+a}{b+c} = 1 - \frac{a+c}{b} + \frac{c(a+c)}{b^2} - \frac{c^2(a+c)}{b^3} + \ldots$

9) $\frac{b+a}{b-c} = 1 + \frac{a+c}{b} + \frac{c(a+c)}{b^2} + \frac{c^2(a+c)}{b^3} + \ldots$

§. 38.

Den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier algebraischer zusammengesetzter Größen findet man auf ähnliche Weise, wie dies bei zwei größeren Zahlen in §. 6 gelehrt wurde. Wären nämlich die beiden Größen $=$ A und B, so würde das dort beschriebene Verfahren, hier bildlich dargestellt, folgendes seyn:

A : B gäbe einen ganzen Quotienten q und einen Rest r
B : r = = = = q' = = = r'
r : r' = = = = q'' = = = r''
r' : r'' = = = = q''' = = = r'''

Wäre nun z. B. $r''' = o$, so wäre r'' der größte gemeinschaftliche Theiler der Größen A und B.

So viel Aehnliches dieses Verfahren auch mit jenem in §. 6 hat und so leicht dort das Aufsuchen des gemeinschaftlichen Thei-

lers war, so mancherlei Schwierigkeiten werden dagegen hier aufstoßen, und nur mehrfache Uebung im algebraischen Calcul wird diese gänzlich zu heben im Stande seyn. Als Leitfaden hierzu dienen folgende Regeln.

1) Die zwei gegebenen Größen müssen nach einem, beiden gemeinschaftlichen, Buchstaben geordnet werden, und zwar so, daß dieser Buchstabe in der höchsten Potenz das erste und in der niedrigsten Potenz das letzte Glied bildet; kommt derselbe bei mehreren Gliedern in der höchsten Potenz stehend und mit andern Größen multiplicirt vor, so müssen letztere in Klammern eingeschlossen und vor diese der Buchstabe und die übrigen gemeinschaftlichen Factoren gesetzt werden. Wäre z. B. die Größe $3a^2b + 4a^2b^2 + 3ab - 6a^2c - 4ab^2$ nach a zu ordnen, so stände solche: $a^2(3b+4b^2-6c)+a(3b-4b^2)$; nach b geordnet aber stände sie: $4b^2(a^2-a) + 3b(a^2+a) - 6a^2c$. Dabei bildet allemal diejenige der 2 gegebenen Größen den Divisor (das B), worinnen der Buchstabe, nach dem man ordnete, in einer niedrigeren Potenz stehet.

2) Größen, die keinen Buchstaben mit einander gemein haben, besitzen auch, außer etwa einem leicht zu entdeckenden Zahlenfactor, keinen gemeinschaftlichen Theiler; z. B. $\frac{5a-3c}{3b+4d}$.

3) Da hier, wie in §. 6, die Quotienten (die q) Größen ohne Nenner, d. h. Ganze seyn müssen, so ist oft eine Vormultiplication oder Division nöthig, ehe die wirkliche Division statt finden kann. Man bemerke darüber: daß jede der gegebenen Größen, oder jeder, im Laufe des Verfahrens erhaltene Rest, mit einem Worte, allemal der Divisor oder Dividend mit einer beliebigen Größe (Zahl oder Buchstabe, einfach oder zusammengesetzt) multiplicirt oder dividirt werden kann: wenn diese Größe nur kein gemeinschaftlicher Factor der gegebenen

Größen ist. So kann z. B. bei $\frac{3a+4bc}{2a^3b+6a^2c}$ die obere Größe mit $2b$ multiplicirt oder die untere mit $2a^2$ dividirt werden; dagegen dürfte bei $\frac{ac(a^2-c^2)}{a(a-c)-3(c-a)}$ die Multiplication mit $a-c$ nicht geschehen, weil diese Größe ein gemeinschaftlicher Factor von beiden ist. Es ist nämlich:

$$\frac{ac(a^2-c^2)}{a(a-c)-3(c-a)} = \frac{ac(a+c)(a-c)}{a(a-c)+3(a-c)} = \frac{ac(a+c)(a-c)}{(a+3)(a-c)}$$

$$= \frac{ac(a+c)}{a+3}$$

4) Bevor die Operation beginnt, besonders aber vor jeder neuen Division, untersuche man genau, ob nicht beide zu dividirende Größen einen gemeinschaftlichen Factor haben. Die Aufsuchung solcher gemeinschaftlichen Factoren beendiget oft das ganze Verfahren. Dagegen würde man nie zum Ziele gelangen, wenn man mit einem versteckt liegenden Factor nur die eine Größe multiplicirte oder dividirte. Nur fortgesetzte Uebung gibt dem Anfänger eine gewisse Fertigkeit bei Auffindung dieser gemeinschaftlichen Factoren. Als Beitrag hierzu mögen folgende Beispiele dienen.

1) $\frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$ gemeinschaftlicher Factor $a+b$

2) $\frac{a^3-b^3}{(a-b)^2}$ " " $a-b$

3) $\frac{a^2+2a-3}{a^2+5a+6}$ " " $a+3$

4) $\frac{a^3b^3+c^3d^3}{a^2b^2-c^2d^2}$ " " $ab+cd$

5) Wenn eine der gegebenen Größen nur aus 2, oft leicht zu entdeckenden Factoren besteht, so sehe man, ob einer dieser Factoren die andere Größe ohne Rest dividirt; dieser ist dann der größte gemeinschaftliche Factor, wenn nicht die kleinere Größe selbst ein Theiler der größeren ist. Größen von der Form, $a^{2m}-b^{2n}$

bestehen allemal aus den 2 Factoren $(a^m+b^n)(a^m-b^n)$ — wie dies das 1ste, 2te und 4te der obigen Beispiele zeigen. So ist z. B. $\frac{a^3+(1+a)ay+y^2}{a^4-y^2} = \frac{a^3+a^2y+ay+y^2}{(a^2+y)(a^2-y)}$ und durch a^2+y dividirt, bringt obige Größe auf $\frac{a+y}{a^2-y}$.

1ste Aufgabe. Von den zwei Größen $ab+b^2$ und $3bc-bd$ ist der größte gemeinschaftliche Theiler?

Aufl. Beide Größen nach b geordnet, stehen $(b^2+ab) : b(3c-d)$ oder $b(a+b) : b(3c-d)$, und mit dem gemeinschaftlichen Theiler b dividirt, bringt solche auf $(a+b) : (3c-d)$. Da der Dividend keinen der beiden Buchstaben des Divisors mehr enthält, so ist b der größte gemeinschaftliche Theiler und $\frac{ab+b^2}{3bc-bd} = \frac{a+b}{3c-d}$.

2te Aufgabe. Der größte gemeinschaftliche Theiler der beiden Größen $14a^2-7ab$ und $10ac-5bc$ ist?

Aufl. Beide Größen nach a geordnet, stehen $(14a^2-7ab)$: $(10ac-5bc)$, da weder $10c$ noch 14 ein gemeinschaftlicher Factor ist, so multiplicire man den Divisor mit 14 und den Dividend mit $10c$, oder man dividire den Dividenden durch 7 und den Divisor durch $5c$, so erhält man $(2a^2-ab) : (2a-b) = a$. Der größte gemeinschaftliche Theiler ist also hier $2a-b$, mit diesen beiden Größen dividirt, gibt solche als $7a$ und $5c$.

3te Aufgabe. Der größte Theiler des Bruches $\frac{4a^2b-5ab^2+b^3}{3a^3-3a^2b+ab^2-b^3}$ ist?

Aufl. Man dividire den Zähler durch b und multiplicire den Nenner durch 4, damit man bei der vorzunehmenden Divi-

sion einen ganzen Quotienten erhält; dieses ausgeführt, gäbe

$$\begin{array}{l|l|l} 4a^3-5ab+b^2 & 12a^3-12a^2b+4ab^2-4b^3 & 3a=q \\ & 12a^3-15a^2b+3ab^2 & \\ & - \quad + \quad - & \\ \hline & 3a^2b+ab^2-4b^3=r. & \end{array}$$

und durch b dividirt giebt $r = 3a^2+ab-4b^2$; den vorher gebrauchten Divisor mit 3 multiplicirt, gibt solchen $= 12a^2-15ab+3b^2$, und selbigen nun durch den gehobenen Rest dividirt, gäbe

$$\begin{array}{l|l|l} 3a^2+ab-4b^2 & 12a^2-15ab+3b^2 & 4=q' \\ & 12a^2+4ab-16b^2 & \\ & - \quad - \quad + & \\ \hline & -19ab+19b^2=r' & \end{array}$$

und mit $19b$ dividirt, giebt $r' = -a+b$. Hiermit abermals den vorigen Divisor dividirt, gäbe

$$\begin{array}{l|l|l} -a+b & 3a^2+ab-4b^2 & -3a-4b=q'' \\ & 3a^2-3ab & \\ & - \quad + & \\ \hline & 4ab-4b^2 & \\ & 4ab-4b^2 & \\ & - \quad + & \\ \hline & & \end{array}$$

Folglich wäre $b-a$ oder $a-b$ der größte Theiler, und der gegebene Bruch würde durch Division mit $a-b$ zu $\frac{4ab-b^2}{3a^2+b^2}$.

4te Aufgabe. Der größte Theiler von

$\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{a^2-b^2-c^2-2bc}$ ist?

Aufl.

$$\begin{array}{l|l|l} a^2-b^2-c^2-2bc & a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc & 1=q \\ & a^2-b^2-c^2 \quad -2bc & \\ & - \quad + \quad + \quad + & \\ \hline & 2b^2+2c^2+2ab+2ac+4bc=r & \end{array}$$

oder $= 2a(b+c)+2b^2+2c^2+4bc$ oder $= a(b+c)+b^2+c^2+2bc$, und da $b+c$ gemeinschaftlicher Factor ist, so

wird, durch Division mit dieser Größe, $r = a+b+c$; hiermit dividirt, gibt:

$$\begin{array}{l|l|l} a+b+c & a^2-b^2-c^2-2bc & a-b-c \\ & a^2+ab+ac & \\ & - \quad - \quad - & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -ab-ac-b^2-c^2-2bc \\ -ab \quad -b^2 \quad -bc \\ + \quad + \quad + \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -ac \quad -c^2-bc \\ -ac \quad -c^2-bc \\ + \quad + \quad + \end{array}$$

Der größte Theiler des gegebenen Bruches ist also $= a+b+c$, und mit diesem den Zähler und Nenner dividirt, bringt den Bruch auf $\frac{a+b+c}{a-b-c}$.

5te Aufgabe. Der größte Theiler des Bruches, $\frac{5a^4c-15a^2b^2c+10ab^3c}{a^3-4a^2b+5ab^2-2b^3}$ ist?

Aufl. Hier könnte ohne weitere Vorbereitung der Zähler durch den Nenner dividirt werden, da jedoch $5c$ zwar gemeinschaftlicher Factor des Zählers, nicht aber des Nenners ist, so dividire man ersteren mit dieser Größe, und erst dann dividire man wie folgt:

$$\begin{array}{l|l|l} a^3-4a^2b+5ab^2-2b^3 & a^4 \quad -3a^2b^2+2ab^3 & a=q \\ & a^4-4a^3b+5a^2b^2-2ab^3 & \\ & - \quad + \quad - \quad + & \end{array}$$

$$4a^3b-8a^2b^2+4ab^3 = r$$

Da $4ab$ gemeinschaftlicher Factor des Restes ist, so dividire man denselben mit dieser Größe, und sodann dividire man wie folgt:

$$\begin{array}{l|l|l} a^2-2ab+b^2 & a^3-4a^2b+5ab^2-2b^3 & a-2b=q' \\ & a^3-2a^2b+\ ab^2 & \\ & -\ +\ - & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -2a^2b+4ab^2-2b^3 \\ -2a^2b+4ab^2-2b^3 \\ +\ -\ + \end{array}$$

Der gesuchte größte Theiler ist also $= a^2-2ab+b^2$, und der gegebene Bruch wird durch Division seines Nenners und Zählers mit dieser Größe zu $\frac{5a^2c+10abc}{a-2b}$

6te Aufgabe. Der größte Theiler von $\frac{a^3+3a^2b+3ab^2-ac^2+b^3-bc^2}{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}$ ist?

Aufl. Den Nenner dieses Bruches durch seinen Zähler dividirt, steht also

$$\begin{array}{l|l|l} a^3\text{ u.} & -a^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-b^4-c^4 & -a+3b=q \\ & -a^4-3a^2b^2+a^2c^2-3a^3b-ab^3+abc^2 & \\ & +\ +\ -\ +\ +\ - & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3a^3b+5a^2b^2+a^2c^2+\ ab^3-\ abc^2+2b^2c^2-\ b^4-c^4 \\ 3a^3b+9a^2b^2\qquad +9ab^3-3abc^2-3b^2c^2+3b^4 \\ -\ -\ -\ +\ + \end{array}$$

$$-4a^2b^2+a^2c^2-8ab^3+2abc^2+4b^2c^2-4b^4-c^4 = r$$

Durch Absonderung der gemeinschaftlichen Factoren wird r zu $a^2(c^2-4b^2)+2ab(c^2-4b^2)+(b^2-c^2)(c^2-4b^2) = a^2+2ab+b^2-c^2$, wenn nämlich mit c^2-4b^2 dividirt wird. Mit diesem Reste den vorherigen Divisor dividirt, gibt $a+b$ zum Quotienten und 0 zum Reste; folglich ist $a^2+2ab+b^2-c^2$ der größte Theiler des gegebenen Bruches, welcher durch Division mit obiger Größe zu $\frac{a+b}{2ab-b^2-a^2+c^2}$ $= \frac{a+b}{(b-a+c)(c+a-b)}$ wird.

7te Aufgabe. Der größte gemeinschaftliche Theiler des Bruches $\frac{4b^2-b+ab-4}{3ab-2a^2+1}$ ist?

Aufl. Man multiplicire den Zähler mit $3a$ und den Nenner mit 4, und dividire ersteren durch letzteren, so folgt:

$$\begin{array}{l|l|l} 12ab-8a^2+4 & 12ab^2-3ab+3a^2b-12a & b=q \\ & 12ab^2 \quad -8a^2b+4b & \\ & - \quad + \quad - & \end{array}$$

$$-3ab+11a^2b-4b-12a=b(11a^2-3a-4)-12a=r$$

Den vorigen Divisor mit $11a^2-3a-4$ und den verbliebenen Rest mit $12a$ multiplicirt, und ersteren durch letzteren dividirt, steht:

$$\begin{array}{l|l|l} 12ab(11a^2-3a-4)-144a^2 & 12ab(11a^2-3a-4)-88a^4-24a^3+76a^2-12a-16 & 1=q' \\ & 12ab(11a^2-3a-4) \quad -144a^2 & \\ & - \quad + & \end{array}$$

$$-88a^4-24a^3+220a^2-12a-16=r'$$

Da dieser Rest kein b mehr enthält, so zeigt dies, daß b kein gemeinschaftlicher Factor des gegebenen Bruches seyn kann, obgleich dasselbe bei ihm am öftersten vorkommt. Man ordne daher die beiden Größen nach a, multiplicire den Nenner des Bruches mit b und dividire, wie folgt:

$$\begin{array}{l|l|l} ab+4b^2-b-4 & -2a^2b+3ab^2+b & -2a=q \\ & -2a^2b-8ab^2+2ab+8a & \\ & + \quad + \quad - \quad - & \end{array}$$

$$11ab^2-2ab-8a+b=a(11b^2-2b-8)+b=r$$

Dividirt man den Divisor mit b und dann den gebliebenen Rest r durch selbigen, so ist:

$$a+4b-1-\frac{4}{b} \Big| \; a(11b^2-2b-8)+b \; \Big| \; 11b^2-2b-8=q'$$

$$\begin{array}{l} a(11b^2-2b-8)-74b+44b^3-19b^2+16+\frac{32}{b} \\ - \qquad\qquad\qquad\quad + \quad - \quad + \quad - \quad - \\ \hline \qquad\qquad 75b-44b^3+19b^2-16-\frac{32}{b}=r' \end{array}$$

Da dieser Rest kein a enthält, so ergibt sich, daß auch a kein gemeinschaftlicher Factor des gegebenen Bruches seyn kann, und da bei demselben außer a und b keine Buchstaben vorkommen, so hat der Bruch auch keinen gemeinschaftlichen Factor.

8te Aufgabe. $\frac{ab^n-cb^{n+1}}{a^2bc-b^3c^3}=\frac{b^{n-1}}{ac+bc^2}$, gemeinschaftl. Theiler $=ab-b^2c$

9te „ $\frac{2a^3-3a^2b-a^2c-2a^2+3ab+ac}{a^4-a}=\frac{2a-3b-c}{a^2+a+1}$, gem. Theiler $=a^2-a$

10te „ $\frac{a^2-b^2+2bc-c^2}{3a^3-c^3+3a^2(b-c)+c^2(a+b)}=\frac{a-b+c}{3a^2+c^2}$, gem. Theiler $=a+b-c$

11te „ $\frac{3b^4-3b^2+ab+a}{3b^3-3b-ab-a}=\frac{3b^3-3b^2+a}{3b^2-3b-a}$, gem. Theiler $b+1$

12te „ $\frac{3a+6b^2-2a^3-4a^2b^2}{8a^3d-12ad-2a^2c^2+3c^2}=\frac{a+2b^2}{c^2-4ad}$, gem. Theiler $3-2a^2$

6 *

Viertes Kapitel.

Auflösung algebraischer Gleichungen vom ersten Grade, mit einer unbekannten Größe.

§. 39.

In der Algebra bedient man sich zur Werthbestimmung der in den Aufgaben befindlichen unbekannten Größen vorzüglich der Gleichungen. Eine Gleichung aber ist die Bezeichnung des Werthes einer Größe auf zwei von einander verschiedene Arten, zwischen welche das Gleichheitszeichen ($=$) gesetzt wird. So sind z. B. $8+4=6\times2$, 1 Thaler $=$ 24 Groschen, $\frac{24-7}{5}=3\frac{2}{5}$, 300 Gulden $=$ 200 Thaler, $2a=a+a$, Gleichungen.

Wird die Richtigkeit einer Gleichung durch den bloßen Anblick oder durch die Reduction der Glieder erkannt, ohne dabei die Werthe der, in selbiger vorkommenden, Buchstaben in Betracht zu ziehen, so heißt eine solche Gleichung eine identische, (wie z. B. die eben angeführten Gleichungen). Folgt aber nur aus gegebenen Bedingungen, daß z. B. de Größe a gleich der Summe der beiden Größen b und c seyn muß, so heißt die Gleichung eine algebraische, auch Gleichung der Bedingungen genannt.

Jede Gleichung besteht aus 2 Theilen, links und rechts des Gleichheitszeichens, und jeder dieser Theile kann wieder aus mehreren, durch die Zeichen $+$, $-$, $\times$ oder : verbundenen Gliedern bestehen.

Die Gleichung ist eine vom ersten Grade, wenn die in ihr enthaltene unbekannte Größe nur in der ersten Potenz stehend vorkommt; sie wird eine Gleichung mit einer unbekannten Größe genannt, wenn darinnen nicht mehr als eine unbekannte Größe vorhanden ist; mit 2, 3 oder

n unbekannten Größen aber, wenn 2, 3 oder n von einander verschiedene unbekannte Größen darinnen vorkommen.

§. 40.

Eine Gleichung reduciren heißt: durch Versetzung und Trennung ihrer einzelnen Glieder derselben eine solche Stellung geben, daß die unbekannte Größe in der 1sten Potenz, mit dem positiven Zeichen und mit dem Coefficienten 1 auf der einen Seite des Gleichheitszeichens, alle andre bekannte Größen hingegen auf der andern Seite des Gleichheitszeichens zu stehen kommen. Hat man dies bewirkt, so dürfen nur die, durch die Zeichen angegebenen Rechnungen mit den bekannten Größen gemacht werden, um den Werth der unbekannten Größe zu erhalten.

Die Reduction der Gleichungen des ersten Grades, bei denen nur eine unbekannte Größe vorkommt, geschieht nach folgenden Regeln.

1) Jedes Glied kann aus dem einen Theile der Gleichung weggeschafft werden, wenn man es in den andern Theil mit dem entgegengesetzten Zeichen setzt; z. B.

$6 + 4 = 10$ oder allgemein $a + b = c$

$6 = 10 - 4$ " $a = c - b$

2) Die Gleichung bleibt richtig, wenn alle Glieder derselben mit einer beliebigen Größe multiplicirt oder dividirt werden. Daher kann man

a) jeden Nenner eines Gliedes wegschaffen, wenn man alle andre Glieder mit demselben multiplicirt; z. B.

$\frac{3}{3} + 4 = 6 + \frac{2}{3}$ oder allgemein $\frac{a}{c} + b = d$

$8 + 12 = 18 + 2$ " $a + bc = cd$

b) jeden Coefficienten eines Gliedes wegschaffen (denselben = 1 machen), wenn man alle andre Glieder mit demselben dividirt; z. B.

$(4 \times 6) + 8 = 32$ oder allgemein $ab + c = d - e$

$6 + \frac{8}{4} = \frac{32}{4}$: $b + \frac{c}{a} = \frac{d-e}{a}$

$6 + 2 = 8.$

3) Die Gleichung bleibt richtig, wenn die Zeichen aller einzelnen Glieder in die entgegengesetzten verwandelt werden, so daß + zu — und — zu + wird, weil man annehmen kann, daß die Gleichung mit — 1 multiplicirt worden sey. Hierdurch kann jedes negative Glied in ein positives verwandelt werden, z. B.

$-6 + 8 = 2$ oder allgemein $a - x = b - c$

$6 - 8 = -2$: $-a + x = -b + c$

$6 = -2 + 8 = 6$: $x = a - b + c$

4) Alle in Klammern ( ) eingeschlossene Glieder zeigen ein für sich bestehendes Ganzes an, von welchem bei den mit einer Gleichung vorzunehmenden Reductionen nicht eher ein einzelnes, in den Klammern stehendes Glied getrennt werden darf, als bis man den gemeinschaftlichen Nenner oder Coefficienten entfernt hat, z. B.

$4(6-2) + 3 = 19$ oder allgemein $a(x-c) + d = e$

$6 - 2 + \frac{3}{4} = \frac{19}{4}$: $x - c + \frac{d}{a} = \frac{e}{a}$

$6 = 2 + \frac{19}{4} - \frac{3}{4}$: $x = c + \frac{e}{a} - \frac{d}{a}$

$6 = 2 + \frac{19-3}{4}$: $x = c + \frac{e-d}{a}$

Oder:

$6(3-7) = 6 - 30$ oder allgemein $x(a-b-c) = d + 4e$

$6 = \frac{6-30}{3-7}$: $x = \frac{d+4e}{a-b-c}$

$6 = \frac{-24}{-4} = +6$

5) Sind in einer Gleichung mehrere Glieder vorhanden, die einen gemeinschaftlichen Factor haben, so kann man diesen trennen, wenn man die, mit ihm multiplicirten Größen in Klammern einschließt, und vor selbige den gemeinschaftlichen Factor setzt, z. B.

$$5x - ax + bx = 6a + bd$$
$$x(5 - a + b) = 6a + bd$$
$$x = \frac{6a + bd}{5 - a + b}$$

Für a, b und d die Zahlen 2, 3 und 5 gesetzt, gibt $x = \frac{12 + 15}{5 - 2 + 3} = \frac{27}{6} = 4\frac{1}{2}$.

6) Es können in einer Gleichung auch in Klammern eingeschlossene Glieder vorkommen, die keinen gemeinschaftlichen Nenner oder Coefficienten haben, sondern nur durch die Zeichen + oder — mit andern Gliedern verbunden sind; hier entfernt man die Klammern (bringt die Glieder aus den Klammern) nach §. 27, indem man, wenn die eingeschlossene Größe durch das positive Zeichen mit den andern Größen verbunden ist, alle in den Klammern stehende Glieder ohne Zeichenveränderung herausgesetzt; ist aber die eingeschlossene Größe durch das negative Zeichen mit den andern Größen verbunden, so werden alle einzelne Glieder derselben mit den entgegengesetzten Zeichen außerhalb der Klammern gesetzt; z. B.

$6x - (4x - 2b) = 4a + 2d$
$6x - 4x + 2b = 4a + 2d$
$2x = 4a + 2d - 2b$
$x = 2a + d - b$ (= 6, wenn $a = 2$, $b = 3$ und $d = 5$)

Oder:

$4ax + (3ab - 3ax - c) = 4a - ab$
$4ax + 3ab - 3ax - c = 4a - ab$
$ax = 4a - ab - 3ab + c$
$ax = 4a - 4ab + c$
$x = 4 - 4b + \frac{c}{a}$ (= — 6, wenn $a = 2$, $b = 3$ und $c = 4$)

§. 41.

Zur Anwendung der, im vorigen §. gegebenen Regeln dienen folgende 24 Aufgaben, wo bei den ersten 8 alle Reductionen nicht nur dargestellt sind, sondern auch der Werth für x, als Sinnbild der unbekannten Größe, allemal in Zahlen beigefügt ist, wenn nämlich $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$, $e = 6$ und $f = 7$ angenommen wird.

1) $4ax - 6b = 4c - 3b$

$4ax = 6b + 4c - 3b$

$4ax = 3b + 4c$

$$x = \frac{3b + 4c}{4a} = \frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 4}{4 \cdot 2} = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$$

2) $5a - 3x = 4x - 6b + 3d$

$-3x - 4x = -5a - 6b + 3d$

$-7x = -5a - 6b + 3d$

$7x = 5a + 6b - 3d$

$$x = \frac{5a + 6b - 3d}{7} = \frac{5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 - 3 \cdot 5}{7} = \frac{13}{7} = 1\frac{6}{7}$$

3) $4ax + 2bx = 4cd - 5a^2 + 2$

$(4a + 2b)x = 4cd - 5a^2 + 2$

$$x = \frac{4cd - 5a^2 + 2}{4a + 2b} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 5 - 5 \cdot 2 \cdot 2 + 2}{4 \cdot 2 + 2 \cdot 3} = \frac{62}{14} = 4\frac{3}{7}$$

4) $5a - x + 2b = 4ax - 3bx + 3cx - 4d$

$-x - 4ax + 3bx - 3cx = -4d - 5a - 2b$

$(3b - 3c - 4a - 1)x = -4d - 5a - 2b$

$$x = \frac{-4d - 5a - 2b}{3b - 3c - 4a - 1} = \frac{-4 \cdot 5 - 5 \cdot 2 - 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 - 3 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 1} = \frac{-36}{-12}$$

$= +3$

5) $2a(4x+2b-3c) = 3abx - 2a + 4x$

$4x + 2b - 3c = \frac{3abx}{2a} - \frac{2a}{2a} + \frac{4x}{2a}$

$4x + 2b - 3c = \frac{3bx}{2} - 1 + \frac{2x}{a}$

$4x - \frac{3bx}{2} - \frac{2x}{a} = 3c - 2b - 1$

$8x - 3bx - \frac{4x}{a} = 6c - 4b - 2$

$8ax - 3abx - 4x = 6ac - 4ab - 2a$

$(8a - 3ab - 4)\,x = 6ac - 4ab - 2a$

$x = \frac{6ac-4ab-2a}{8a-3ab-4} = \frac{6.2.4-4.2.3-2.2}{8.2-3.2.3-4} = \frac{20}{-6}$

$= -3\frac{1}{3}$

Durch folgendes Verfahren gelangt man schneller zum Ziel.

$2a(4x+2b-3c) = 3abx - 2a + 4x$

$8ax + 4ab - 6ac = 3abx - 2a + 4x$

$8ax - 3abx - 4x = 6ac - 4ab - 2a$

$x(8a-3ab-4) = 6ac - 4ab - 2a$

$x = \frac{6ac-4ab-2a}{8a-3ab-4}$

6) $4ax - (6c-8x) + 4d = 8bc - 6c + 4bx$

$4ax - 6c + 8x + 4d = 8bc - 6c + 4bx$

$4ax - 4bx + 8x = 8bc - 4d.$ ($-6c$ und $+6c = 0$)

$ax - bx + 2x = 2bc - d$ (durch Division mit 4)

$x(a-b+2) = 2bc - d$

$x = \frac{2bc-d}{a-b+2} = \frac{2.3.4-5}{2-3+2} = \frac{19}{1} = 19$

7) $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{x}{c}-\frac{x}{e}+2d-1$

$x+\frac{ax}{b}=\frac{ax}{c}-\frac{ax}{e}+2ad-a$

$bx+ax=\frac{abx}{c}-\frac{abx}{e}+2abd-ab$

$bcx+acx=abx-\frac{abcx}{e}+2abcd-abc$

$bcex+acex=abex-abcx+2abcde-abce$
$bcex+acex-abex+abcx=2abcde-abce$
$x(bce+ace-abe+abc)=2abcde-abce$
$x=\frac{2abcde-xabce}{bce+ace-abe+abc}=\frac{2\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6-2\cdot3\cdot4\cdot6}{3\cdot4\cdot6+2\cdot4\cdot6-2\cdot3\cdot6+2\cdot3\cdot4}$
$=\frac{1296}{108}=12$

Bei Gleichungen, wie die vorstehende, wo x mit mehreren Nennern behaftet erscheint, kommt man schneller zum Ziel, wenn man alle diese Brüche nach §. 34 auf gleiche Nenner bringt und die vorhandenen bekannten Größen mit dem Generalnenner multiplicirt. Nach dieser Regel verfahren, würde die vorstehende Gleichung also behandelt werden.

$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{x}{c}-\frac{x}{e}+2d-1$

$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}-\frac{x}{c}+\frac{x}{e}=2d-1$, und da $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}-\frac{x}{c}+\frac{x}{e}=\frac{bcex+acex-abex+abcx}{abce}$, so wird

$\frac{x(bce+ace-abe+abc)}{abce}=2d-1$ und

$x(bce+ace-abe+abc)=2abcde-abce$

$x=\frac{2abcde-abce}{bce+ace-abe+abc}$

ß) $\frac{a}{bx} - \frac{c}{ax} = bc - cd + \frac{4a}{x}$

$\frac{a}{bx} - \frac{c}{ax} - \frac{4a}{x} = bc - cd$

$\frac{a^2 - bc - 4a^2b}{abx} = bc - cd$ (§. 34)

$a^2 - bc - 4a^2b = abx(bc - cd)$

$\frac{a^2 - bc - 4a^2b}{ab(bc - cd)} = x = \frac{2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 - 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3(3 \cdot 4 - 4 \cdot 5)} =$

$\frac{-56}{-48} = +1\frac{1}{6}$

9) $6 - 4a + 2bx = 4 + 2a - bx$

$x = \frac{6a - 2}{3b}$

10) $5ab - 3bx = 4ax - 2bx + 12$

$x = \frac{5ab - 12}{b + 4a}$

11) $3{,}25x - 24 = 2{,}46x - 12$

$x = \frac{12}{0{,}79} = 15{,}189\ldots$

12) $3{,}4b - 24ax = 2ab - 2{,}4x$

$x = \frac{ab - 1{,}7b}{1{,}2 - 12a}$

13) $2{,}5x - 3{,}7ab - 2abx = 40ax$

$x = \frac{3{,}7ab}{2{,}5 - 2ab - 40a}$

14) $abx - bcx - dx = 4{,}2x - 6x + 12$

$x = \frac{12}{b(a - c) - d + 1{,}8}$

15) $\frac{ab}{x} - 2a + 2{,}5 = \frac{4b}{2x} - 3a + 3{,}47$

$$x = \frac{b(2-a)}{a - 0{,}97}$$

16) $x = \frac{ab + cd - ex}{ab}$

$$x = \frac{ab + cd}{ab + e}$$

17) $\frac{a}{x} - \frac{b}{2x} + \frac{c}{3x} - \frac{d}{4x} = e - 2{,}4$

$$x = \frac{12a - 6b + 4c - 3d}{12e - 28{,}8}$$

18) $\frac{5abx^2}{4} - \frac{3ax}{b} = 2bx - \frac{3cx}{a}$

$$x = \frac{4a(2b^2 + 3a) - 12bc}{5a^2b^2}$$

19) $\frac{bx}{a} + \frac{ax}{b} - 4c = 1 + \frac{b^2}{a^2} - 4c$

$$x = \frac{a^2b + b^3}{ab^2 + a^3} = \frac{b(a^2 + b^2}{a(b^2 + a^2} = \frac{b}{a}$$

20) $(a - x)(b + x) - ab = \frac{a^2}{b} - x^2 - 2a + b$

$$x = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab - b^2} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)b} = \frac{a+b}{b}$$

21) $\frac{8a^2}{x} - \frac{2b}{ax} + \frac{3c}{4x} = \frac{3c}{8a} - \frac{b}{a^2} + 4a$

$$x = \frac{64a^4 - 16ab + 6a^2c}{32a^3 - 8b + 3ac} = 2a$$

22) $3bc - \left(\frac{4bx-6bc}{a}\right) = 4bx + abx$

$$x = \frac{3ac+bc}{a^2+4a+4} = \frac{3c}{a+2}$$

23) $\frac{ax^2-bc}{x} = ax + cb - b(3-a)$

$$x = \frac{c}{3-a-c}$$

24) $\frac{(a+x)(b+x)}{b-x} = -a - x - (a+b)^2$

$$x = \frac{a^2b+2ab+2ab^2+b^3}{a^2+2ab+b^2-2b} = \frac{b(a+b)^2+2ab}{(a+b)^2-2b}$$

Dritter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Erklärungen.

§. 42.

Wenn 2 Größen, was für welche es auch sind, so gegen einander verglichen werden, daß die eine das Maaß der andern wird, oder daß die eine Größe durch die andre bestimmt wird, so erhält man ein mathematisches Verhältniß. Dieses Verhältniß aber heißt ein arithmetisches, wenn die eine Größe durch die andre mittelst der Subtraction, ein geometrisches hingegen, wenn die eine Größe durch die andere mittelst der Division bestimmt wird. Wären z. B. die beiden Größen 12 und 4 gegeben, so wäre das arithmetische Verhältniß $12 - 4$ und das geometrische $12 : 4 = \frac{12}{4}$. Bei dem arithmetischen Verhältnisse gibt nämlich der Unterschied zweier gegebenen Größen, bei dem geometrischen aber der Quotient dieser beiden Größen jenes Maaß ab.

Jedes Verhältniß kann als aus 3 Größen bestehend betrachtet werden, nämlich aus dem Vordergliede (im obigen Beispiel 12),

aus dem Hintergliede, (i. o. B. 4), und aus dem Maaße dieser beiden Glieder, dem Unterschiede, (i. o. B. 8), beim arithmetischen, oder dem Quotienten (3) beim geometrischen Verhältnisse.

Wird das oben angeführte Verhältniß umgekehrt, d. h. sein Vorderglied zum Hintergliede gemacht, so würde der Unterschied beim arithmetischen Verhältniß negativ, und der Quotient beim geometrischen ein Bruch.

Sind die Größen, die auf solche Art mit einander verglichen werden sollen, benannt, so müssen selbige, bevor dies geschehen kann, auf gleichartige Einheiten gebracht werden.

§ 43.

Wenn zwei Verhältnisse, die einerlei Unterschied oder Quotienten haben, in Form einer Gleichung zusammengestellt werden, so erhält man eine Proportion, und zwar eine arithmetische, wenn es zwei gleiche arithmetische, eine geometrische aber, wenn es zwei gleiche geometrische Verhältnisse sind. So ist z. B. $12 - 4 = 16 - 8$ eine arithmetische und $12 : 4 = 9 : 3$ eine geometrische Proportion.

Bei jeder Proportion heißen das erste und letzte Glied zusammen die äußeren, die übrigen beiden Glieder der Proportion aber die mittleren Glieder. So sind bei obigem Beispiel 12 und 8 die äußeren, 4 und 16 die mittlern Glieder der arithmetischen, hingegen 12 und 3 die äußeren, 4 und 9 aber die mittleren Glieder der geometrischen Proportion.

Bei Proportional-Aufgaben (Regeldetri-Aufgaben) können die Bedingungen so gegeben seyn, daß zwar die einzelnen Glieder der aus den gegebenen Bedingungen gebildeten Proportion in einem geometrischen Verhältniß zu einander stehen, die Proportion aber selbst nicht richtig ist, wie z. B. $12 : 4 = 3 : 9$; eine solche fehlerhafte Proportion heißt eine ungerade oder verkehrte, im Gegensatz zu einer richtigen oder geraden. Sie wird richtig

oder gerade gemacht, wenn bei ihr ein Mittelglied mit seinem äußeren Glied verwechselt wird, so daß das Mittelglied zum äußeren, das äußere aber zum Mittelglied wird; dieses auf obiges Beispiel angewandt, gäbe die Proportion entweder: $12 : 4 = 9 : 3$ oder $4 : 12 = 3 : 9$.

Eine Proportion heißt stätig, wenn die zwei mittleren Glieder einander gleich sind; so ist z. B. $8 - 5 = 5 - 2$ eine stätige arithmetische, und $16 : 8 = 8 : 4$ eine stätige geometrische Proportion. Dabei schreibt man der Kürze wegen das Mittelglied nur einmal; obige beide Proportionen würden daher also stehen: $8 - 5 - 2$ und $16 : 8 : 4$.

§. 44.

Da jede Proportion als eine Gleichung betrachtet werden kann, so gelten für selbige auch alle in §. 40 angeführten Gesetze. Die Resultate, die durch Anwendung dieser Gesetze auf die Proportionen herbeigeführt werden, sind in den folgenden 2 Kapiteln ausführlich dargestellt. Hier mögen nur die, unter 1 und 2 des 40sten §. angegebenen Gesetze bei den folgenden Beispielen ihre Anwendung finden. Vermöge derselben kann, unbeschadet der Richtigkeit der Proportionen,

1) bei der arithmetischen Proportion zu einem äußern und einem Mittelgliede eine beliebige Größe n addirt oder davon subtrahirt werden (Beispiel 1 und 2);

2) bei der geometrischen Proportion ein äußeres Glied zu einem äußern und ein Mittelglied zu einem Mittelgliede addirt oder davon subtrahirt werden (Beispiel 3 und 4);

3) können ein äußeres und ein Mittelglied oder auch alle 4 Glieder mit einer beliebigen Größe n multiplicirt oder durch selbige dividirt werden. Dadurch aber kann man

a) die gebrochenen Größen einer Proportion entfernen, wenn man dieselbe mit den sämmtlichen Nennern multiplicirt (Beispiel 5 und 6) und

b) eine Proportion, deren Glieder aus zusammengesetzten Größen bestehen, durch Aufsuchung eines gemeinschaftlichen Theilers in eine andre verwandeln, deren Glieder einfacher ausgedrückt sind (Beispiel 7, 8 und 9.)

Bei den folgenden Beispielen sind, zu schnellerer Einsicht für den Anfänger, folgende Werthe für die Buchstaben angenommen: $a=2$, $b=4$, $c=5$, $d=10$, $g=9$, $h=6$, $p=7$, und $r=4$, und jedem allgemeinen Beispiel steht das, nach diesen Werthen ausgedrückte Besondere gegenüber:

1) $g-h=p-r$ oder $9-6=7-4$

$n+g-h=n+p-r$ $n+9-6=n+7-4$

$n+g+r=n+p+h$ $n+9+4=n+7+6$

$g+r=p+h$ $9+4=7+6$

2) $g-h=p-r$ oder $9-6=7-4$

$g-h-n=p-r-n$ $9-6-n=7-4-n$

$g+r+n=p+h+n$ $9+4+n=7+6+n$

$g+r=p+h$ $9+4=7+6$

3) $d:c=b:a$ oder $10:5=4:2$

$d+d:c=b+b:a$ $10+10:5=4+4:2$

$2d:c=2b:a$ $20:5=8:2$

$2ad=2bc$ $2\times2\times10=2\times4\times5$

$ad=bc$ $2\times10=4\times5$

4) $d:c=b:a$ oder $10:5=4:2$

$d:c-c=b:a-a$ $10:5-5=4:2-2$

$d(a-a)=b(c-c)$ $10(2-2)=4(5-5)$

$d\times o=b\times o$ $10\times0=4\times0$

$o=o$ $0=0$

5) $g-\frac{h}{a}=p-\frac{r}{b}$ oder $9-\frac{6}{2}=7-\frac{4}{4}$

$abg-hb=abp-ar$ $72-24=56-8$

$abg-ar=abp-hb$ $72+8=56+24$

7

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

6) $\frac{d}{h} : \frac{c}{a} = \frac{b}{h} : 1$ oder $\frac{1}{6}° : \frac{3}{2} = \frac{4}{6} : 1$

$ad : hc = ab : ah$ $\quad 20 : 30 = 8 : 12$

$a^2dh = abch$ $\quad 20 \times 12 = 30 \times 8$

7) $ag - ah = ap - ar$ oder $2 \cdot 9 - 2 \cdot 6 = 2 \cdot 7 - 2 \cdot 4$

$g - h = p - r$ $\quad 9 - 6 = 7 - 4$

$g + r = p + h$ $\quad 9 + 4 = 7 + 6$

8) $bd : be = b^2 : ab$ oder $40 : 20 = 16 : 8$

$d : c = b : a$ $\quad 10 : 5 = 4 : 2$

$ad = be$ $\quad 20 = 20$

9) $\frac{a}{n} : \frac{aq}{m} = \frac{b}{n} : \frac{bq}{m}$

$\frac{abq}{nm} = \frac{abq}{nm}$ und durch $\times$ mit nm erhält man $abq = abq$

Zweites Kapitel.

Von den arithmetischen Proportionen.

§. 45.

1) In jeder arithmetischen Proportion, von der allgemeinen Form: $g - h = p - r$, ist die Summe der beiden Mittelglieder = der Summe der äußern Glieder, nämlich $h + p = g + r$ oder $6 + 7 = 9 + 4$, bei den, im vorigen §. für die Buchstaben bestimmten Werthen (§. 40 ad 1).

2) In einer stätigen arithmetischen Proportion ist die Summe der äußeren Glieder = dem doppelten Mittelgliede; hätte nämlich die Proportion die Form: $g - h = h - n$, so ist: $g + n = 2h$; oder $9 + 3 = 2 \cdot 6$ (§. 40 ad 1).

Aus 1 folgt: daß man zu 3 gegebenen Größen, die in einem arithmetischen Verhältnisse stehen, die vierte unbekannte Proportio-

nal-Größe (x) erhält, wenn man diese 3 Größen mit x als Proportion ansetzt (in welcher x das Vorder- oder Hinterglied) und von der Summe der Mittelglieder dieser Proportion das bekannte äußere Glied abziehet; wäre aber ein Mittelglied $= x$, so erhielte man dessen Werth, wenn man von der Summe der äußeren Glieder das bekannte Mittelglied abzöge, z. B. $4 - 7 = 9 - x$ und $9 + 7 - 4 = x$, folglich $x = 12$; die Proportion wäre also $4 - 7 = 9 - 12$, oder $9 - 6 = x - 7$. Die Summe der äußeren Glieder $= 9 + 7 = 16$, davon das mittlere abgezogen, gibt $x = 16 - 6 = 10$ und die Proportion $9 - 6 = 10 - 7$.

Aus 2 folgt: daß man die unbekannte dritte Proportional-Größe (x) erhält, wenn man von dem doppelten Mittelgliede das bekannte äußere Glied abziehet; oder, wäre die Summe zweier Zahlen = dem Doppelten einer dritten unbekannten Zahl (so daß x als Mittelglied erschien), so erhält man den Werth für x, wenn man jene Summe durch 2 dividirt, z. B. $x - 9 = 9 - 11$, also $x = 2 \cdot 9 - 11 = 7$; die Proportion aber wäre $7 - 9 = 9 - 11$. Wäre $9 - x = x - 5$, so ist $2x = 14$ und $x = 7$ und folglich die Proportion $9 - 7 = 7 - 5$.

Die Anwendung der hier angeführten Gesetze der arithmetischen Proportionen soll durch Auflösung der folgenden 6 Aufgaben gezeigt werden.

§. 46.

1ste Aufgabe. Welches ist das vierte unbekannte Glied der arithmetischen Proportion 3, $5\frac{1}{2}$ und 7?

Aufl. Nach vorigem §. ist $3 - 5\frac{1}{2} = 7 - x$, also $x = 12\frac{1}{2} - 3 = 9\frac{1}{2}$.

2te Aufgabe. Welches ist das arithmetische Mittel zwischen $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$?

Aufl. Die zu bildende Proportion wäre $\frac{3}{4} - x = x - \frac{4}{5}$ und $x = \frac{\frac{3}{4} + \frac{4}{5}}{2} = \frac{31}{40}$.

3te Aufgabe. $4{,}5 - 2{,}3 = x - 3{,}2$

Aufl. $x = 5{,}4$

4te Aufgabe. $2{,}37 - x = 4{,}5 - 2{,}26$

Aufl. $x = 0{,}13$

5te Aufgabe. $4{,}72 - x = x - 4{,}33$

Aufl. $x = 4{,}525$

6te Aufgabe. $4\frac{1}{4} - 2{,}53 = 2{,}53 - x$

Aufl. $x = 0{,}81$

Oft tritt beim Rechnungswesen im bürgerlichen Leben der Fall ein, daß aus mehreren Größen eine mittlere Proportionalgröße (eine durchschnittsmäßige Zahl) gesucht werden soll. Man addirt in diesem Fall alle gegebenen Größen und dividirt deren Summe derselben durch die Anzahl der Größen. Dadurch erhält man nun zwar kein solches arithmetisches Mittel, wie das der 2ten Aufgabe war, aber doch eine durchschnittsmäßige Größe, die dem wahren arithmetischen Mittel um so näher kommt, je mehr die Werthe der gegebenen Größen sich einander nähern.

1ste Aufgabe. Bei einer Holzauction wurde die erste Klafter für 2 Thlr. 16 gr., die zweite für 2 Thlr. 20 gr., die dritte für 3 Thlr., die vierte für 3 Thlr. 4 gr., die fünfte für 2 Thlr. 20 gr., und die sechste für 3 Thlr. verkauft; wie theuer ist im Durchschnitt die Klafter Holz verkauft worden?

Aufl. Die Groschen in Bruchthaler verwandelt, sämmtliche Größen addirt und durch die Anzahl der Klaftern, $= 6$ dividirt, gibt den mittleren Preis einer Klafter.

$$\frac{2\frac{2}{3} + 2\frac{5}{6} + 3 + 3\frac{1}{6} + 2\frac{5}{6} + 3}{6} = 2\frac{1}{1\,2} = 2 \text{ Thlr. } 22 \text{ gr.}$$

2te Aufgabe. Man erhielt bei Versuchen, den wahren Inhalt von 10 Fichten, die gleichen Durchmesser und gleiche Höhe hatten, durch stereometrische Approximation zu bestimmen, folgende Resultate; nämlich beim ersten Versuch 4,7976 Cubikfuß für

den Inhalt, beim zweiten 5,0024 Cubikf., beim dritten 4,8476 Cubikf., beim vierten 4,7038 Cubikf., beim fünften 4,6073 Cubikf., beim sechsten 4,9480 Cubikf., beim siebenten 5,0248 Cubikf., beim achten 4,7274 Cubikf., beim neunten 4,8236 Cubikf., und beim zehnten 4,9467 Cubikf. Was würde, diesen Versuchen zufolge, der durchschnittsmäßige Inhalt einer solchen Fichte seyn?

Aufl. Die Summe der obigen Größen = 48,4292, folglich der mittlere Inhalt einer Fichte = 4,84292.

Drittes Kapitel.

Von den geometrischen Proportionen.

§. 47.

In jeder geometrischen Proportion von der allgemeinen Form, $a : aq = b : bq$, ist das Product der äußeren Glieder = dem Producte der mittleren Glieder; da nämlich $a : aq = b : bq$ und $\frac{a}{aq} = \frac{b}{bq}$, so folgt nach §. 40 auch $abq = abq$, oder in der Proportion $2 : 6 = 3 : 9$ ist $2 \times 9 = 3 \times 6$. Ist aber die Proportion stätig, d. h. hat sie die allgemeine Form $a : aq = aq : aq^2$, so ist das Product der äußeren Glieder = dem Quadrate des mittleren Gliedes; also $a^2q^2 = a^2q^2$, oder in der Proportion $2 : 6 = 6 : 18$ ist $2 \times 18 = 6^2$.

In beiden Fällen findet man zu 3 gegebenen Größen, welche in geometrischen Verhältnissen zu einander stehen, die 4te unbekannte Proportionalgröße x mittelst Anwendung der in §. 40 gegebenen Regeln, indem man die gebildete Proportion wie jede andre Gleichung reducirt. Beim ersten Fall ist

1) x, wenn es als äußeres Glied erscheint, = dem Producte der beiden Mittelglieder, dividirt durch das bekannte äußere Glied, z. B. $a : b = c : x$ oder $2 : 3 = 4 : x$

$$x = \frac{bc}{a} \qquad \text{oder} \qquad x = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

2) ist x, wenn es als Mittelglied erscheint, $=$ dem Producte der beiden äußeren Glieder, dividirt durch das bekannte Mittelglied, z. B. $a : x = b : e$ oder $2 : x = 3 : 6$

$$x = \frac{ae}{b} \quad \text{oder} \quad x = \tfrac{1}{3}^2 = 4$$

Beim zweiten Fall ist

1) x, wenn es als äußeres Glied steht, $=$ dem Quadrat des Mittelgliedes, dividirt durch das bekannte äußere Glied, z. B.

$$x : a = a : c \quad \text{oder} \quad x : 2 = 2 : 4$$

$$x = \frac{a^2}{c} \quad \text{oder} \quad x = \frac{2^2}{4} = 1$$

2) Steht aber x als Mittelglied, so müssen, um dessen Werth zu bestimmen, die in den §§. 71 bis 76 folgenden Regeln angewendet werden.

§. 48.

Mit den vier Gliedern einer geometrischen Proportion können, unbeschadet der Richtigkeit derselben, folgende Veränderungen vorgenommen werden.

1) Können in der Proportion $a : aq = b : bq$ die beiden Mittelglieder verwechselt werden, denn es ist $a : b = aq : bq$ und $abq = abq$.

2) Können die äußeren Glieder als mittlere und diese als äußere Glieder gesetzt werden, denn es ist $aq : a = bq : b$ und $abq = abq$.

Ueberhaupt läßt jede geometrische Proportion folgende 8 Versetzungen ihrer Glieder zu: 1) $a : aq = b : bq$, 2) $a : b = aq : bq$, 3) $bq : aq = b : a$, 4) $bq : b = aq : a$, 5) $b : a = bq : aq$, 6) $b : bq = a : aq$, 7) $aq : bq = a : b$, und 8) $aq : a = bq : b$.

§. 49.

Multiplicirt man die unter einander stehenden Glieder zweier oder mehrerer geometrischen Proportionen mit einander, so werden die erhaltenen Producte ebenfalls in Proportion stehen, d. h. man wird in ihnen eine zusammengesetzte Proportion erhalten; es ist nämlich

$4 : 2 = 6 : 3$	oder allgemein	$a : b = c : d$
$9 : 3 = 12 : 4$		$e : f = g : h$
$8 : 2 = 12 : 3$		$i : k = m : n$

$(4.9.8) : (2.3.2) = (6.12.12) : (3.4.3)$ od. $aei : bfk = cgm : dhn$

$288 : 12 = 864 : 36$

Auch für die zusammengesetzten Proportionen gelten alle bereits angeführten Gesetze.

Sind bei zwei oder mehreren einfachen Proportionen die Glieder von der Beschaffenheit, daß die zwei vordern Glieder der folgenden Proportion den zwei hintern Gliedern der vorhergehenden gleich sind, so kann die daraus entwickelte zusammengesetzte Proportion durch Reduction nach §. 40 abgekürzt werden. Wären z. B. folgende 3 Proportionen gegeben,

$4 : 2 = 6 : 3$	oder allgemein	$a : b = c : d$
$6 : 3 = 8 : 4$		$c : d = e : f$
$8 : 4 = 10 : 5$		$e : f = g : h$

so wäre die zusammengesetzte Proportion:

$(4.6.8) : (2.3.4) = (6.8.10) : (3.4.5)$ oder $ace : bdf = ceg : dfh$, und

$(4.6.8) \times (3.4.5) = (2.3.4) \times (6.8.10)$ oder $ace \times dfh = bdf \times ceg$, und durch Division mit $(3.4.6.8)$ wird sie zu $4.5 = 2.10$ oder $a \times h = b \times g$ (durch Division mit $cdef$)

Hieraus erhält man die Proportion $4 : 2 = 10 : 5$ oder $a : b = g : h$

In diesem Falle stehen nämlich die beiden ersten Glieder $(a : b)$ der 3 gegebenen Proportionen mit den beiden letztern

($g : h$) in Proportion; die Zwischenglieder können daher ganz wegfallen.

Sind bei zwei, drei oder mehreren Proportionen die beiden Hinterglieder gleich, so kann die durch Multiplication erhaltene zusammengesetzte Proportion ebenfalls abgekürzt werden. Wären z. B. folgende 3 Proportionen gegeben:

$8 : 4 = 6 : 3$	oder allgemein	$a : b = m : n$
$10 : 5 = 6 : 3$		$c : d = m : n$
$18 : 9 = 6 : 3$		$d : e = m : n$

so erhielte man $(18.10.8) : (4.5.9) = 6^3 : 3^3$ oder

$$acd : bde = m^3 : n^3$$

Wäre aber dabei das Vorderglied der folgenden Proportion dem zweiten Mittelgliede der vorhergehenden gleich, so findet man, bei gehöriger Reduction, daß sich das Vorderglied (a) der ersten Proportion zum ersten Mittelglied (d) der zweiten Proportion verhält, wie sich die Quadrate oder Cuben (je nachdem zwei oder drei einfache Proportionen gegeben sind) der beiden Glieder zur Rechten des Gleichheitszeichens zu einander verhalten; z. B.

$16 : 8 = 6 : 3$	oder allgemein	$a : b = m : n$
$8 : 4 = 6 : 3$		$b : c = m : n$
$4 : 2 = 6 : 3$		$c : d = m : n$

Durch Multiplication erhält man $(16.8.4) : (8.4.2) = 6^3 : 3^3$

oder $abc : bcd = m^3 : n^3$ und

durch Aufheben mit (8.4), $16 : 2 = 6^3 : 3^3$ oder $a : d = m^3 : n^3$ (durch Aufheben mit bc)

Durch die hier angeführten Gesetze der geometrischen Proportionen werden die Auflösungen der, in den folgenden §§. gegebenen Aufgaben, nämlich die der sogenannten Regeldetri-Aufgaben begründet. Auch ist die Auflösung mehrerer im vierten Abschnitt folgenden algebraischen Aufgaben, worinnen geometrische Verhältnisse vorkommen, nur hierdurch möglich.

§. 50.

Die bereits angeführte Eintheilung der Proportionen, in einfache und zusammengesetzte, begründet auch eine zweifache Abtheilung der Regeldetri-Aufgaben. Man unterscheidet nämlich:

a) die einfache Regeldetri von
b) der zusammengesetzten.

Bei den Aufgaben jener wird zu drei gegebenen Gliedern einer geometrischen Proportion das unbekannte vierte Glied, bei den Aufgaben der letzteren aber, wird zu 5, 7, 9...n Gliedern einer zusammengesetzten geometrischen Proportion das unbekannte 6te, 8te, 10te..$n+1$ste Glied, zu wissen verlangt. Bei beiden aber können die Bedingungen der Aufgabe so gestellt seyn, daß in der zu bildenden Proportion eins oder mehrere Glieder zu den übrigen in keinem richtigen Verhältnisse stehen (s. §. 43), die Proportion also nur erst dann richtig wird, wenn man mit ihr nach §. 43 verfährt. Man unterscheidet daher, sowohl bei der einfachen, als zusammengesetzten Regeldetri, die Aufgaben in solche, wo die aus den gegebenen Bedingungen zu bildende Proportion gleich richtig oder gerade und in solche, wo bei der gebildeten Proportion erst eins oder mehrere Glieder umgewendet stehen müssen.

§. 51.

Bei allen Arten von Regeldetri-Aufgaben werden die Proportionen gewöhnlich nicht als Gleichungen angesetzt — wie dies in den früheren §§. geschah — sondern um dem Anfänger das Bilden der Proportion aus den Bedingungen zu erleichtern, werden die Glieder derselben, auf den zwei Seiten eines senkrecht gezogenen Striches so angesetzt, daß die beiden äußeren Glieder (bei einer zusammengesetzten Proportion alle äußere Glieder), wovon das eine allemal unbekannt, nämlich $= x$,

auf die linke Seite, die beiden mittleren Glieder (oder alle mittleren Glieder) aber auf die rechte Seite des Striches gesetzt werden. Das Product der rechts dem Striche stehenden Glieder (der mittleren) durch das Product der links stehenden bekannten Glieder (der äußeren) dividirt, gibt in dem Quotienten den Werth des noch unbekannten äußeren Gliedes x (vergl. §. 47 und 49).

Bevor man, um x zu bestimmen, Product macht, untersuche man jedoch, ob zwei Glieder, von denen das eine rechts, das andre links des gezogenen Striches stehen muß, einen gemeinschaftlichen Theiler haben. Ist dies der Fall, so dividire man diese beiden Glieder mit demselben, d. h. man verkleinere solche nach §. 44.

Sind auf einer, oder auf beiden Seiten des Striches Brüche, so betrachte man den Zähler als eine ganze Zahl und setze den Nenner auf die entgegengesetzte Seite des Striches. Sind diese Brüche aber mit Ganzen versehen, so verwandle man solche nach §. 1 zu unächten (man richte sie ein), und verfahre dann mit selbigen wie eben gelehrt wurde. Die in einer Proportion vorkommenden benamten Größen müssen zuvor auf gleichartige Einheiten gebracht werden. Wären z. B. in dem einen Gliede Groschen, in dem andern Thaler gegeben, so müssen entweder die letzteren zu Groschen oder die ersteren, nach §. 15. zu einem Thalerbruch gemacht werden.

§. 52.

A) Aufgaben über die einfache gerade Regeldetri.

1ste Aufgabe. Man bezahlt für 3 Klftr. Holz 4 Thlr. 8 gr., was werden nach diesem Preise 48 Klftr. Holz kosten?

Aufl. Es sind 4 Thlr. 8 gr. $= 4\frac{1}{3}$ Thlr. Bei Bildung des Ansatzes verfahre man bei dieser und allen Aufgaben dieses, und des 53 §s. nach folgenden Regeln.

1) Man untersuche, wonach in der Aufgabe gefragt wird; hier nach Geld.

2) Das der Frage Gleiche, Bekannte, setze man oben rechts des gezogenen Striches — hier ist, da nach Gelde gefragt ward, $4\frac{2}{3}$ Thlr. das bekannte Geld.

3) Man frage ferner: was erhält man für dieses Geld? oder überhaupt: worauf bezieht sich das nach 2 gefundene Bekannte? und setze die, durch die Beantwortung dieser Frage erhaltene Größe, unten links des Striches; — hier erhielt man für $4\frac{1}{3}$ Thlr. 3 Klftrn. Holz. Man hat nun das eine bekannte Mittelglied, $4\frac{1}{3}$ Thlr., und das eine bekannte äußere Glied, 3 Klftrn., der in der Aufgabe enthaltenen Proportion.

4) Nun setze man die Frage x, als das zweite bekannte äußere Glied, oben links des Striches, und das, was sich auf diese Frage bezieht (hier die 48 Klftrn). unten rechts des Striches; so ist der Ansatz vollendet. Zur Prüfung der Richtigkeit eines jeden Ansatzes untersuche man noch: ob die Einheiten der einander gegenüber stehenden Größen gleichartig sind. Bei den folgenden Ansatze ist die Frage, links oben: wie viel Thaler? — ihr gegenüber stehen ebenfalls Thaler; das zweite Glied, links unten, bezeichnet 3 Klftrn., ihm gegenüber stehen ebenfalls Klftrn. Bei vorstehender Aufgabe fände also folgende Auflösung statt.

x Thlr.	$4\frac{1}{3}$ Thlr. $= \frac{13}{3}$
3	16
3 Klft.	48 Klftr.

3 : : 16 × 13 und 208 : 3 = $69\frac{1}{3}$ Thlr.

2te Aufgabe. Wenn der Cubikfuß fichtenes Brennholz für 8 pf. verkauft wird, wieviel Thaler wird dann die $\frac{5}{4}$ellige Klftr. dergl. Holzes, die 75 Cubikfuß enthält, kosten?

Aufl. 8 pf. = $\frac{2}{3}$ gr. und $\frac{2}{3}$ gr. = $\frac{1}{36}$ Thlr., also

x Thlr.	$\frac{1}{36}$ Thlr.
36	
12	25
1 Cubikf.	75 Cubikf.

12 : : 25 u. 25 : 12 = 2_{11}^{1} Thlr. = 2 Thlr. 2 gr.

3te Aufgabe. Es wurden 5 Baustämme, die 12 gr. niederzuschneiden kosteten, und zusammen 108 Cubikfuß enthielten, für 13 Thlr. 4 gr. und den Betrag des Niederschneiderlohns verkauft; wie viel Pfennige kostet dabei ein Cubikfuß?

Aufl. 13 Thlr. 4 gr. + 12 gr. = 13 Thlr. 16 gr. = 3936 Pfennige, also

x pf.	3936 pf.
	656
	328
9	
18	
108 Cbkf.	1 Cbkf.

9 : : 328 und 328 : 9 = $36\frac{4}{9}$ pf.

4te Aufgabe. Zur Besäung eines Gehaues, der 4 Acker 150 □R. Fläche enthält, den Acker zu 300 □R. gerechnet, verwendete man 3 Schfl. 6 Metzen Fichtensaamen; wieviel Saamen wird zur Besäung eines Gehaues von 7 Acker 60 □R. erforderlich seyn?

Aufl. 4 Acker 150 □R. = $4\frac{1}{2}$ Acker; 7 Acker 60 □R. = $7\frac{1}{5}$ Acker; 3 Schfl. 6 Mtz. = $3\frac{3}{8}$ Schfl.; also

x Schfl.	$3\frac{3}{8}$ Schfl. = $\frac{27}{8}$
8 z	
5	z
$\frac{9}{z}$ = $4\frac{1}{2}$ A.	$7\frac{1}{5}$ Ack. = $\frac{36}{5}$ 9

5 : : 27 und 27 : 5 = $5\frac{2}{5}$ Schfl.

5te Aufgabe. Ein Revier von 420 Acker Waldboden wird bei 25jährigem Umtriebe auf Niederwald bewirthschaftet; es können also jährlich $\frac{420}{25} = 16\frac{4}{5}$ Acker abgetrieben werden. Zeither lieferte im Durchschnitt der Acker 10 Klftr. Stangenholz und 65 ßo. Reißholz; wie viel Klftrn. Stangenholz und wieviel ßo. Reißholz wird man jährlich von diesem Reviere erhalten?

Aufl. Da hier 2 Fragen in der Aufgabe enthalten sind, so sind zu deren Beantwortung auch 2 Ansätze erforderlich; nämlich:

x Kl.	10 Kl.	x ßo.	65 ßo.
	2		13
5		5	
1 Ack.	$16\frac{4}{5}$ Ack. $= \frac{84}{5}$	1 Ack.	$16\frac{4}{5}$ Ack. $= \frac{84}{5}$

1 :: 84 × 2 = 168 Kl. Holz u. 1 :: 84 × 13 = 1092 ßo. Rholz.

6te Aufgabe. Wenn das Fällerlohn für die Klftr. Stangenholz 8 gr., der Verkaufspreis aber 2 Thlr. 16 gr. beträgt; das Hackerlohn für 1 ßo. Reißig hingegen 6 gr. und der Verkaufspreis 1 Thlr. ist; wie groß wird die jährliche reine Nutzung von diesem Reviere seyn?

Aufl. 2 Thlr. 16 gr. − 8 gr. = $2\frac{1}{3}$ Thlr. reiner Gewinn an einer Klafter; 1 Thlr. — 6 gr. = 18 gr. = $\frac{3}{4}$ Thlr. reiner Gewinn an einem Schock Reißig; also

x Thlr.	$\frac{3}{4}$ Thlr.	x Thlr.	$2\frac{x}{3}$ Thlr. $= \frac{7}{3}$
4	273	3	56
1 ßo.	1092 ßo.	1 Klftr.	168 Klftr.

1 :: 273 × 3 = 819 Thlr. 1 :: 56 × 7 = 392 Thlr.

Das Revier rentirt also jährlich

392 Thlr. durch den Verkauf der Klafterhölzer,
819 " " der Reißholzschocke.

1211 Thlr. Nutzung des Reviers.

7te Aufgabe. Was ist der Werth dieses Reviers, bei 5 pro Cent Zinnsen?

Aufl. Die Frage heißt eigentlich hier: Wie groß ist ein Kapital, das jährlich 1211 Thlr. Zinnsen bringt, da ein Kapital von 100 Thlr. jährlich 5 Thlr. gibt? Es ist demnach:

x Thlr. Kap.	100 Thlr. Kapital
	20
geben 5 Thlr. Zinsen	1211 Thlr. Zinnsen.

$1 :: 1211 \times 20 = 24220$ Thlr. = dem Werthe des Reviers.

8te Aufgabe. Ein Holzhändler kaufte 270 Klftr. Scheitholz, die Klftr. zu 3 Thlr. Er will durch den Verkauf dieser Hölzer 12 pro Cent gewinnen; wie theuer wird derselbe die Klftr. verkaufen müssen?

Aufl. Hier heißt die Frage: An 100 Thlrn. will der Holzhändler 12 Thlr. gewinnen, wieviel wird derselbe an 3 Thlrn. gewinnen? es ist also:

x gr. Gew.	12 Thlr. = 288 gr. Gew.
	72
25	
an 100 Thlr. Verl.	3 Thlr. Verlag.

$25 :: 72 \times 3$ und $216 : 25 = 8\frac{16}{25}$ gr. = 8 gr. $7\frac{17}{25}$ pf.

Der Holzhändler wird also 3 Thlr. 8 gr. $7\frac{17}{25}$ pf. für die Klafter fordern müssen.

9te Aufgabe. Bei einem Gehau, von 3 Ack. 225 □R. waren 23 Thlr. 8 gr. Culturkosten erforderlich. Ein andrer Gehau von 7 Ack. 125 □R., von ähnlicher Beschaffenheit wie ersterer, soll mit einer theuerern Saamenart besäet werden, die im Ganzen einen Mehraufwand von 10 Thlrn. 12 gr. verursacht; es fragt sich nun, wie hoch sich die Culturkosten bei letzterem Gehaue belaufen werden.

Aufl. Wäre der, durch den theurern Saamen verursachte Mehraufwand nicht, so wäre, da 3 Ack. 226 □R. = $3\frac{1}{4}$ Ack., 7 Ack. 125 □R. = $7\frac{5}{12}$ Ack. und 23 Thlr. 8 gr. = $23\frac{1}{3}$ Thl. sind, folgender Ansatz erforderlich:

12	x Thlr.	$23\frac{1}{3}$ Thlr. = $\frac{70}{3}$	14
3 3	3		
$\frac{15}{4}$ = $3\frac{1}{4}$ Ack.		$7\frac{5}{12}$ Ack. = $\frac{89}{12}$	4

3×3×3 = 27 :: 89×14 = 1246 und 1246 : 27 = $46\frac{4}{27}$ Thlr. würden diese $7\frac{5}{12}$ Acker zu cultiviren kosten; da aber im Ganzen noch $10\frac{1}{2}$ Thlr. Mehraufwand statt hat, so kosten solche $46\frac{4}{27}$ + $10\frac{1}{2}$ = $56\frac{35}{54}$ Thlr. = 56 Thlr. 15 gr. $6\frac{2}{3}$ pf.

10te Aufgabe. Ein Forstbedienter, der von einem entfernten Saamenhändler 48 Schfl. Holzsaamen erhalten hatte, mußte den Schfl. mit 2 Thlr. 16 gr. bezahlen, hatte überdies pro Schfl. 8 pf. Accise und für alle 48 Schfl. 3 Thlr. 12 gr. Fracht zu berichtigen; wie theuer kam der Schfl. mit allen Unkosten zu stehen?

Aufl. 3 Thlr. 12 gr. = 84 gr. betrug die ganze Fracht, es kam davon also auf einen Schfl. $\frac{84}{48}$ gr. = $\frac{7}{4}$ = $1\frac{3}{4}$ gr. = 1 gr. 9 pf.; der Schfl. kam daher 2 Thlr. 16 gr. + 1 gr. 9 pf. + 8 pf. = 2 Thlr. 18 gr. 5 pf.

11te Aufgabe. Nach Hartigs physikalischen Versuchen wiegt der Cubikfuß grünes Fichtenholz 57 Pfund 13 Loth; was wird die $\frac{6}{4}$ellige Klafter dergl. Scheitholzes, die 75 Cubikfuß enthält, wiegen?

Aufl. Da 57 Pfund 13 Loth = $57\frac{1}{3}\frac{3}{2}$ Pfund das Gewicht eines Cubikfußes, so wiegen 75 Cbkf. oder eine $\frac{6}{4}$ell. Klftr. $57\frac{1}{3}\frac{3}{2}$ × 75 = $\frac{13775}{32}$ = 4305 Pfund 15 Loth.

12te Aufgabe. Ein Holzhändler hatte bei 50 Baustämmen, die zusammen 1860 Cbkf. enthielten, den Cbkf. für 1 gr. 4 pf. erkauft und pro Stamm noch überdies 2 gr. Anweisegeld bezahlt. Er wünscht durch den Verkauf dieser 50 Stämme

10 Thlr. zu verdienen; wie theuer wird er den Cubikfuß verkaufen müssen?

Aufl. Wen ein Cbkf. $1\frac{1}{3}$ gr. $= \frac{1}{18}$ Thlr. kostet, so kosten alle Ckbf. $\frac{1}{18} \times 1860 = 103\frac{1}{3}$ Thlr. Das Anweisegeld beträgt im Ganzen $50 \times 2 = 100$ gr. $= 4\frac{1}{6}$ Thlr., die 50 Stämme kosten demnach dem Holzhändler $103\frac{1}{3} + 4\frac{1}{6} = 107\frac{1}{2}$ Thlr., dazu die 10 Thlr. Gewinn, gibt in $117\frac{1}{2}$ Thlr. $= 2820$ gr. die Summe des Verkaufpreises für alle 50 Stämme, und in $2820 : 1860 = 1\frac{6}{31}$ gr. $= 1$ gr. $6\frac{6}{31}$ pf. den Verkaufpreis eines Cubikfußes.

Anmerk. Regeldetri-Aufgaben, wie die 3 letzten, wo eins der bekannten Glieder $= 1$, lassen sich stets durch Anwendung der im §. 8 gegebenen Regeln auflösen. In der letzten Aufgabe war eine Frage: Was kosten 1860 Cbkf., wenn 1 Cbkf. 8 pf. kostet? die andre aber: Was kostet 1 Cbkf., wenn 1680 Cbkf. 2820 gr. kosten? Die erste Frage führte also auf ein bloßes Multiplications-, die zweite auf ein Divisions-Exempel.

§. 53.

B) Aufgaben über die einfache ungerade oder verkehrte Regeldetri.

Bei dem, nach vorigem §. gefertigten Ansatz untersucht man vor Allem, ob die beiden untern Glieder im geraden Verhältniß zu der in der Aufgabe ausgesprochenen Frage stehen oder nicht. Denkt man sich eins der nntern Glieder (gleichviel welches) durch die Größe a, die Frage aber durch x bezeichnet, so werden die untern Glieder im richtigen oder geraden Verhältniß zur Frage stehen, wenn man aus den Bedingungen der Aufgabe schließen kann, daß, je größer a ist, desto größer auch x seyn muß, oder, je mehr a, desto mehr x, je länger a, desto länger x u. s. w. seyn muß. Folgte jedoch aus den Bedingungen der Aufgabe der Schluß: je größer a, desto kleiner x, je länger a, desto kürzer x u. s. w., so ständen die beiden untern Glieder im

ungeraden oder verkehrten Verhältniß zur Frage, sie müßten also nach §. 43 umgewendet, d. h. das Glied rechts des Striches müßte links und das links des Striches rechts gesetzt werden.

Kürzer ausgedrückt besagen diese Regeln: ist die Antwort auf die Frage, die bei den untern Gliedern in Bezug auf die in der Aufgabe ausgesprochene Frage gethan wird, widersprechend, d. h. erfolgt auf die Frage: je mehr? die Antwort: desto weniger; so werden diese Glieder umgewendet.

1ste Aufgabe. Aus einem Bretklotze werden 27 Stück $\frac{3}{4}$ Zoll starke Breter geschnitten; wieviel Breter von $2\frac{1}{4}$ Zoll Stärke können aus demselben Klotze geschnitten werden? vorausgesetzt: daß auf die verminderte Zahl der Sägeschnitte keine Rücksicht genommen würde.

Aufl. Der unten stehende Ansatz ist nach den im vorigen §. gegebenen Regeln gebildet; die, bei den untern zwei Gliedern anzuwendende Frage lautet hier: je stärker die Breter, die aus einem Klotze geschnitten werden, desto weniger Breter werden erhalten; die Glieder $\frac{3}{4}$ und $2\frac{1}{4}$ stehen also im verkehrten Verhältniß zur Frage und müssen umgewendet werden.

x Brtr.	27 Breter
	3
$\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}\ \frac{3}{4}$ Zoll	$2\frac{1}{4}$ Zoll $\frac{3}{4}$

$3 \times 3 = 9$ Breter.

Denn würden die beiden Glieder nicht umgewendet, so würde man $27 \times 3 = 81$ Breter aus jenem Klotze erhalten, wo man nur 27, die dreimal schwächer waren, als erstere erhielt.

2te Aufgabe. Mit 240 Stück Obstbäumen wollte man eine Straße in 3 Ruthen weiter Entfernung bepflanzen; man war aber genöthigt, die Entfernung zu $3\frac{3}{4}$ Ruthen anzunehmen, indem von obiger Anzahl Bäume mehrere verdorben waren; wieviel Stück brauchte man nun?

Aufl. Bei dem, auf vorgeschriebene Art gebildeten Ansatze sagt man: je weiter die Bäume von einander zu stehen kommen, desto weniger Bäume braucht man.

x Bäume	240 Bäume
	16
	4
$\frac{15}{4} = 3\frac{1}{4}$	$3\frac{3}{4}$
3 Ruthen	Ruthe 3

$16 \times 4 \times 3 = 192$ Stück.

3te Aufgabe. Wenn die $\frac{5}{4}$ellige Klafter Scheite um 3 Thlr. 8 gr. verkauft wird, so kostet 1 Cubikfuß 1 gr. 3 pf.; wenn nun die $\frac{3}{4}$ell. Klafter für dasselbe Geld verkauft wird, wie theuer kommt dann der Cubikfuß? vorausgesetzt, daß die Zwischenräume der Klafter proportional mit der Scheitlänge wachsen.

Aufl. Hier ist die anzuwendende Frage etwas zusammengesetzt; sie setzt nämlich voraus, daß, je länger die Scheite einer Klafter sind, desto mehr Cubikfuß dieselbe enthält, und schließt dann: je mehr Cubikfuß für ein gewisses Geld verkauft werden, desto weniger kann 1 Cubikfuß kosten.

x gr.	$1\frac{1}{4}$ gr. $= \frac{5}{4}$
4	
$\frac{9}{4}$ $\frac{3}{4}$ ell.	$\frac{9}{4}$ ell. $\frac{5}{4}$

$4 \times 9 :: 5 \times 5$ und $25 : 36 = \frac{2}{3}\frac{5}{6}$ gr. $= 8\frac{1}{3}$ pf.

kostet der Cubikfuß der $\frac{9}{4}$ell. Klafter.

4te Aufgabe. Zur Cultur einer Blöße, die anfänglich 90 Acker groß war, wurde jährlich ein gewisses Geld bestimmt, wofür zeither 5 Acker 75 □Ruthen besäet wurden, so daß der Acker im Durchschnitt 6 Thlr. zu stehen kam. Der noch übrige Theil dieser Blöße soll bepflanzt werden; gemachten Versuchen zufolge bepflanzt man den Acker nicht unter 8 Thlr. 6 gr.; wieviel Acker wird man nunmehro für dasselbe Geld jährlich bepflanzen können?

Aufl. Ansatz: $5\frac{1}{4}$ Acker werden besäet, wenn der Acker 6 Thlr. kam; wieviel Acker können bepflanzt werden, wenn der Acker $8\frac{1}{4}$ Thlr. kommt? Frage: Je größer die Culturkosten eines Ackers, desto weniger Acker können für ein gewisses Geld cultivirt werden.

	x Ack.		$5\frac{1}{4}$ Ack. $= \frac{21}{4}$	7
11				
$\frac{33}{4} = 8\frac{1}{4}$	6 Thlr.		$8\frac{1}{4}$ Thlr.	6

11 : : 7 × 6 und 42 : 11 = $3\frac{9}{11}$ Ack.

5te Aufgabe. Zu einer 480 Ruthen langen Stangenvermachung um eine Eichelsaat braucht man 540 Stück Stangen, wenn selbige sechsfach über einander kommen sollen. Zur Vermachung einer andern Saat, deren Umfang 720 Ruthen ist, erhielt man eine gleiche Anzahl Stangen, womit man auskommen sollte; wievielfach werden diese über einander gebaut werden können?

Aufl. Die Frage lautet hier: je mehr Ruthen Umfang, desto weniger mal können die Stangen über einander gebaut werden.

	x mal		6 mal	
12				4
720	480 Ruth.		720 Ruthen	480

4 mal.

6te Aufgabe. Eine 4 Acker 250 □Ruthen große Blöße kann in 24 Tagen bepflanzt werden, wenn jeden Tag 8 Mann pflanzen; man will aber diese Blöße gern in 4 Tagen bepflanzt haben; wieviel Mann wird man dazu täglich annehmen müssen?

Aufl. Frage: Je mehr Tage gepflanzt wird, desto weniger Arbeiter bedarf man täglich.

	x Mann		8 Mann	
				2
4	24 Tage		4 Tage	24

24 × 2 = 48 Mann.

§. 54.

C) Aufgaben über die zusammengesetzte Regeldetrt, mit geraden und ungeraden Verhältnissen.

Der Ansatz wird hier auf ähnliche Art, wie bei den vorigen Aufgaben gebildet. Hat man nämlich das bekannte, mit x gleichnamige Glied oben rechts des Striches angesetzt, so setzt man links des Striches alle die in der Aufgabe gegebenen Größen, die sich unmittelbar auf das oben angesetzte bekannte Glied beziehen, unter einander. Hierauf setzt man die Frage x oben links des Striches, und alle unmittelbar auf diese Frage Bezug habende Größen rechts des Striches so unter einander, daß jedes Glied mit dem, ihm links gegenüber stehenden gleichartige Einheiten hat.

Bei zwei einander gegenüber stehenden Gliedern, wendet man die §. 53 angeführten Fragen an, und untersucht hierdurch, ob gerade oder ungerade Verhältnisse statt finden; mit letztern verfährt man sodann nach §. 53.

Uebrigens gilt, rücksichtlich des fernern Verfahrens bei der Auflösung, alles, was §. 51 darüber gesagt ward.

1ste Aufgabe. Um einen 480 Ellen langen, $1\frac{1}{2}$ Elle breiten und $1\frac{1}{4}$ Elle tiefen Graben um ein Gehege aufzuwerfen, waren 6 Arbeiter, jeder 6 Tage, erforderlich; wieviel Arbeiter werden nöthig seyn, um einen 500 Ellen langen, 2 Ellen breiten und $1\frac{1}{2}$ Elle tiefen Graben in 5 Tagen zu fertigen?

Aufl. Da hier nach Arbeitern gefragt wird, und die bekannte Zahl derselben 6 ist, so setze man diese oben rechts, und da diese 6 Arbeiter in 6 Tagen einen Graben von 480 Ellen Länge, $1\frac{1}{2}$ Elle Breite und $1\frac{1}{4}$ Elle Tiefe fertigen, so setze man, da diese Größen alle unmittelbar auf die oben rechts angesetzte 6 Bezug haben, dieselben links des Striches unter einander. Nun kommt die Frage: x (wieviel Arbeiter?) links oben, und da diese x Arbeiter in 5 Tagen einen Graben von 500 Ell. Länge, 2 Ell. Breite und $1\frac{1}{2}$ Ell. Tiefe fertigen sollen, und diese 4 Größen sich ebenfalls un-

mittelbar auf x beziehen, so setze man letztere 4 in derselben Reihefolge, wie die links stehenden 4 Größen, rechts des Striches. Zur Prüfung der Richtigkeit der Verhältnisse sind hier die anzuwendenden Fragen: je mehr Tage, desto weniger Arbeiter; je länger, breiter und tiefer der Graben, desto mehr Arbeiter sind erforderlich. Es ist also nur das erstere Verhältniß ungerade, folglich umzuwenden. Das weitere Verfahren zeigt nachstehender Ansatz.

		x Arb.	6 Arb.		
	3	6 Tage.	3 Tage. 6		
:	8	480 Ell.	300 Ell. Länge.	10	2
		$1\frac{1}{2}$ Ell.	2 Ell. Breite.		
$\frac{3}{4}$	=	$1\frac{1}{4}$ Ell.	$1\frac{1}{2}$ Ell. Tiefe.	4	

$6 \times 2 = 12$ Arbeiter.

2te Aufgabe. Ein Holzhändler bezahlte 1 Thlr. 8 gr., um 1 Klftr. $\frac{5}{4}$ell. buchenes Scheitholz $2\frac{1}{2}$ Stunde weit fahren zu lassen; wieviel Fuhrlohn wird derselbe im Verhältniß für 40 Klft. $\frac{7}{4}$ell. fichtene Scheite, die $4\frac{1}{2}$ Stunde entfernt stehen, bezahlen können, wenn man annimmt, daß die Zwischenräume der einzelnen Klaftern proportional mit der Scheitlänge zunehmen, die Schwere eines Cubikfußes buchenen Holzes zu der eines Cubikfußes fichtenen aber sich verhält wie 8 zu 7?

Aufl. Ansatz: Für $1\frac{1}{3}$ Thlr. bekommt man 1 Klft. $\frac{5}{4}$ell. Scheite $2\frac{1}{2}$ Stunde weit gefahren, dessen Schwere $= 8$; wieviel (x) Thlr. beträgt die Fracht für 40 Klftrn. $\frac{7}{4}$ell. Scheite, die $4\frac{1}{2}$ Stunde weit zu fahren sind, wenn das Verhältniß der Schwere zum buchenen $= 7$. Fragen: Je mehr Klaftern, desto mehr Fracht; je weiter es zu fahren, desto mehr Fracht; je länger die Scheite, desto mehr Fracht; je schwerer das Holz, desto mehr Fracht. Hier sind also lauter gerade Verhältnisse.

			x Thlr.			$1\frac{1}{3}$ Thlr.	$=\frac{4}{3}$	
3	1	Klftr.	40	Kl.	3			
	$\frac{5}{4}$	ell.	7			$\frac{7}{4}$	ell.	
	4					4		
$\frac{5}{2}$	$=2\frac{1}{2}$	St.				$4\frac{1}{2}$ St.	$=\frac{9}{2}$	3
	8					7		

5 : : 4 × 7 × 3 × 7 und 588 : 5 = $117\frac{3}{5}$ Thlr. =
117 Thlr. 14 gr. $4\frac{4}{5}$ pf.

3te Aufgabe. Die Klftr. $\frac{6}{4}$ ell. fichtene Scheite à 75 Cubikfuß Holzmasse, wird für 1 Thlr. 12 gr., die Klftr. $\frac{7}{4}$ ell. buchene Scheite, zu 84 Cubikfuß, für 2 Thlr. 19 gr. verkauft, die Hitzkraft eines Cubikfußes Buchenholzes verhält sich zu der des fichtenen wie 6 zu 4,8. Es fragt sich nun: steht der Preis der Klftr. Buchenholzes zu dem des fichtenen im richtigen Verhältniß oder nicht?

Aufl. Hier wird eigentlich gefragt: wie theuer die Klftr. Buchenholz unter den in der Aufgabe angegebenen Verhältnissen zu stehen kommt, wenn die Klftr. fichtenes für 1 Thlr. 12 gr. verkauft wird. — Erst aus der Beantwortung dieser Frage findet man die Antwort auf jene in der Aufgabe ausgesprochen. Die Fragen zur Prüfung der Verhältnisse sind hier: Je mehr Cubikfuß, desto größer der Preis; je mehr Hitzkraft, desto größer der Preis.

			x Thlr.			$1\frac{1}{2}$ Thlr.	$=\frac{3}{2}$	
2	15	75	Cbkf.			84 Cbkf.	7	
	5						10	2
2	4	$\frac{48}{10}$	$=4,8$			6 . 3		

2 × 5 : : 7 × 3 und 21 : 10 = $2\frac{1}{10}$ Thl. = 2 T. 2 gr. $4\frac{4}{5}$ pf.
sollte eigentlich die $\frac{7}{4}$ Klftr. buchene Scheite kosten, sie ist also um 2 Thlr. 19 gr. — 2 Thlr. 2 gr. $4\frac{4}{5}$ pf. = 16 gr. $7\frac{1}{5}$ pf. zu

theuer (wenn dabei auf das Bedürfniß der Gegend oder den Mangel des Buchenholzes keine Rücksicht genommen wird).

4te Aufgabe. 6 Maurer fertigen eine Mauer, die 27 Ellen lang, 4 Ellen hoch und 18 Zoll stark ist, in 6 Tagen, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten; 5 andre Maurer sollen eine 36 Ellen lange, $3\frac{3}{4}$ Ellen hohe, und 20 Zoll starke Mauer in 8 Tagen fertigen; wieviel Stunden werden sie täglich arbeiten müssen?

Aufl. Fragen: Je mehr Maurer, desto weniger Stunden brauchen sie täglich zu arbeiten; je mehr Tage, desto weniger Stunden ꝛc.; je länger, höher und stärker die Mauer, desto mehr Stunden ꝛc.

		x St.		10 St.		5	
	5	6 Maurer.		5 Maurer.		6	2
2	8	6 Tage.		8 Tage.		6	
	3	27 Ellen.		36 Ell. Länge.		4	
	4	4 Ellen.		$3\frac{3}{4}$ Ell. Höhe	=	$\frac{15}{4}$	3
	6	$\frac{3}{4}$ Ellen.		$\frac{5}{6}$ Ell. Stärke.		4	

2 : : 5 × 5 und 25 : 2 = $12\frac{1}{2}$ Stunden.

5te Aufgabe. 3 Holzmacher fertigen in 4 Wochen 72 Klftr. Holz, wenn sie 6 Tage in der Woche und täglich 12 Stunden arbeiten. An demselben Orte will man 480 Klftrn. Holz durch 4 andre Holzmacher aufbereiten lassen, die aber wegen andrer Arbeiten in der Woche nur 4 Tage und täglich nur 9 Stunden arbeiten können; wieviel Wochen werden diese zubringen?

Aufl. Fragen: Je mehr Holzmacher, desto weniger Wochen werden selbige über Aufbereitung einer gewissen Klafterzahl zubringen; je mehr Klftrn. gefertigt werden sollen, desto mehr Wochen ꝛc.; je mehr Tage in der Woche, desto weniger Wochen ꝛc.; je mehr Stunden des Tages, desto weniger Wochen ꝛc.

			x Woch.	4 Woch.			
		4	3 Holzm.	4 Holzm.	3		
		6	72 Klft.	480 Kl.	120	40	
		4	6 Tage.	4 Tage.	6		
3	9		12 Stund.	9 Stund.	12		

40 Wochen.

6te Aufgabe. In wieviel Jahren wird ein Kapital von 3600 Thlr., welches zu $4\frac{1}{2}$ pro Cent ausgeliehen ist, 567 Thlr. Interessen gebracht haben?

Aufl. Ansatz: In einem Jahr bringen 100 Thlr. $4\frac{1}{2}$ Thlr. Interessen, in wieviel (x) Jahren bringen 3600 Thlr. 567 Thlr. Interessen. Fragen: Je größer die Interessen, die ein gewisses Kapital bringen soll, desto mehr Jahre muß es auf Zinnsen stehen; je größer daß Kapital, das eine gewisse Summe Interessen bringen soll, desto weniger Jahre ꝛc.

			x Jahre	1 Jahr.			
3600			100 Thlr.	3600 Thlr. Kap.		100	
18							
2				63	7		
$\frac{9}{2}$	=	$4\frac{1}{2}$	Thlr.	567 Thlr. Int.		2	

2 : : 7 und 7 : 2 = $3\frac{1}{2}$ Jahr.

Die Auflösung der nun folgenden 6 Aufgaben kann nur durch mehrere Proportionalansätze geschehen. Sind welche davon so beschaffen, wie die 3 letzten Aufgaben des §s. 52, so wird bei ihrer Auflösung so verfahren, wie es dort und im §. 8 gelehrt wird.

7te Aufgabe. Ein Holzhändler hat 450 Klftrn. $\frac{6}{4}$ ell. Scheite, die Klftr. für 3 Thlr. erkauft; er will selbige mit 10 pro Cent Gewinn an einen Hammerbesitzer verkaufen; wie theuer wird er die Klftr. geben können, und was wird der Hammerbesitzer im Ganzen zu bezahlen haben?

Aufl. Man bestimme erst den Gewinn an einer Klftr. und addire diese Summe zu den Einkaufspreise, so erhält man den Ver-

Kaufspreis einer Klftr. Hierauf multiplicire man mit letzterer Summe die Klafterzahl, so erhält man in dem Producte das, was der Hammerbesitzer zu bezahlen hat, nämlich:

x Thlr.	10 Thlr. Gewinn.
an 100 Thlr.	3 Thlr.

$\frac{3}{10}$ Thlr. Gewinn.

Der Verkaufspreis einer Klafter wäre also $3\frac{3}{10}$ Thlr. = 3 Thlr. 7 gr. 2,4 pf. Der Hammerbesitzer aber hätte zu bezahlen: $450 \times 3{,}3 = 1485$ Thlr.

8te Aufgabe. Auf einer Fläche von $24\frac{2}{3}$ Ack., sind pro Ack. 40 Klftr. Holz geschätzt worden. Dieses Holz hat ein Händler, die Klftr. mit 3 Thlr. 8 gr. gleich baarer Zahlung, erkauft. Nach abgeschlossenem Handel findet sich jedoch, daß der Käufer erst in 18 Monaten Geld schaffen kann. Der Verkäufer will sich diesen verspäteten Zahlungstermin gefallen lassen, wenn ihm der Käufer das Geld mit 5 pro Cent jährlich verzinnset. Wieviel wird der Käufer nach 18 Monaten zu bezahlen haben, und was kommt ihm sodann die Klftr. zu stehen?

Aufl. Man bestimme erst die Anzahl der Klaftern; diese ist: $40 \times 24\frac{2}{3} = 986\frac{2}{3}$; suche hierauf nach folgendem Ansatz den Preis einer Klftr. mit den 18monatlichen Interessen, — so hat man die 2te Frage beantwortet. Hierauf multiplicire man die Anzahl der Klftrn. mit dem gefundenen Preise, so erhält man in dem Producte die Antwort auf die erste der oben gegebenen Fragen.

	x Thlr.		3 Thlr. Zinnsen.	
geben	100 Thlr.		$3\frac{1}{3}$ Thlr. =	$\frac{10}{3}$
	2			
3			6	
2	12 Mon.		18 Monat.	

$2 \times 2 :: 1$ und $1 : 4 = \frac{1}{4}$ Thlr.

Der Preis einer Klafter = $3\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 3\frac{7}{12}$ Thlr. = 3 Thlr. 14 gr. und $3\frac{7}{12} \times 986\frac{2}{3} = 3535\frac{5}{9}$ Thlr. = 3535 Thlr. 13 gr. 4 pf. hat der Käufer im Ganzen zu zahlen.

9te Aufgabe. Bei einer, auf Niederwald, bei 20jährigem Umtriebe bewirthschafteten Fläche von 27 Ack., erhielt man zeither pro Ack. im Durchschnitt 84 ßo. Reißholz. Wenn nun das Hackerlohn für 1 ßo. Reißholz 6 gr., der Verkaufspreis aber 1 Thlr. 12 gr. beträgt, was rentirt dieser Wald dann jährlich, und was ist derselbe, zu 5 pro Cent angeschlagen, werth?

Aufl. Es werden jährlich $27 : 20 = 1\frac{7}{20}$ Ack. abgetrieben; diese liefern, da ein Ack. 84 ßo. gibt, $1\frac{7}{20} \times 84 = 113\frac{2}{5}$ ßo. Reißholz. Jedes ßo. gibt einen reinen Nutzen von 1 Thlr. 12 gr. — 6 gr. Hackerlohn = 1 Thlr. 6 gr.; folglich rentirt der Wald jährlich: $113\frac{2}{5} \times 1\frac{1}{4} = 141\frac{3}{4}$ Thlr. = 141 Thlr. 18 gr.

Es geben aber:	x Thlr.	100 Thlr. Kapital.	
	4	20 5	
5 Thlr. Zinnsen.		$141\frac{3}{4}$ Thlr. Zinnsen	$= \frac{567}{4}$

$567 \times 5 = 2835$ Thlr. = dem gesuchten Waldwerth.

10te Aufgabe. Ein Holzhändler bezahlet für 60 Stück Klötzer 96 Thaler. Er ließ diese Klötzer mit einem Fuhrlohn von 6 gr. pro Stück auf eine Schneidemühle schaffen, sie daselbst mit einem Bretschneiderlohn von 2 gr. pro Stück zu Bretern schneiden und erhielt 36 ßo. Breter. Wie theuer wird derselbe das ßo. Breter verkaufen müssen, um an seinem sämmtlichen Verlage noch 12 pro Cent zu gewinnen?

Aufl. 6 gr. $= \frac{1}{4}$ Thlr. Fuhrlohn $\times 60 = 15$ Thlr. Fuhrlohn.
2 gr. $= \frac{1}{1\frac{1}{2}}$ = Brtschn. Lhn. $\times 60 = 5$ = Bretschn. Lohn.
Die Klötzer selbst kosten 96 Thlr.

sämmtlicher Verlag: 116 Thlr.

davon will derselbe 12 pro Cent gewinnen, es ist also:

x	12 Thlr. Gewinn.
25	3
an 100 Thlr.	116 Thlr.

25 : : 116×3 und $348 : 25 = 13\frac{23}{25}$ Thlr.

Es ist aber $116 + 13\frac{2}{2\,5} = 129\frac{2}{2\,5}$ Thlr. der Verkaufspreis aller 36 Bo. Breter; und $129\frac{2}{2\,5} : 36 = 3\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{7}{5}$ Thlr. = 3 Thlr. 14 gr. 7,36 pf. wäre der Verkaufspreis eines Schockes.

11te Aufgabe. Zwei Holzempfänger wollen ihre, auf 2 Revieren erhaltene Scheitholzquanta, gegenseitig vertauschen, und zwar soll der Cubikinhalt und die Hitzkraft das Verhältniß angeben, nach welchem der Tausch vollzogen werden soll; das aber, was einer dem andern dann herauszugeben hat, soll nach der, in der Gegend bestehenden Taxe bezahlt werden. A hat nun 24 Klftr. $\frac{6}{4}$ ell. fichtene Scheite, à 75 Cubikfuß, B aber 16 Klftr. $\frac{7}{4}$ ell. buchene Scheite, à 84 Cubikfuß, zu vertauschen; wenn sich nun die Hitzkraft des buchenen zu der des fichtenen wie 5 : 4 verhält, welcher wird dann dem andern herausgeben müssen, und wieviel an Gelde, da der Cubikfuß buchenes Holz 1 gr. 4 pf., der Cubikfuß fichtenes aber 10 pf. in der Gegend kostet?

Aufl. Man berechne erst, wieviel 24 Klftrn. $\frac{6}{4}$ ell. fichtene Scheite, an buchenen $\frac{7}{4}$ ell. ausmachen, oder umgekehrt, subtrahire die herauskommende Klafterzahl von den gegebenen 16 Klftrn., oder, im Fall jene größer, als 16 ausfallen sollte, diese von jener. Die erhaltene Differenz verwandle man in Cubikschuh, und multiplicire diese mit dem Preis eines Cubikschuhes. Nämlich:

x	1 Klftr. buchenes.
84 Cbkf.	$(24 \times 75 = 1800$
	$360)$ Cbkf.
7 21	120
3 Grad	4 Grad Hitze.

7 : : 120 und 120 : 7 = $17\frac{1}{7}$ Klftr. buchenes wären jene 24 Klftr. fichtenes.

Demnach hätte B an A $17\frac{1}{7} - 16 = 1\frac{1}{7}$ Klftr. buchenes Holz zu bezahlen. Diese enthalten: $1\frac{1}{7} \times 84 = 96$ Cubikfuß. Demnach erhält A von B noch $96 \times 1\frac{1}{3}$ gr. = 128 gr. = 5 Thlr. 8 gr.

12te Aufgabe. Einem Zimmermann sollte die Fertigung eines 400 Ellen langen Wildzauns um ein Gehege für 16 Thlr. 16 gr. verdungen werden, wozu er $6\frac{2}{3}$ ßo. 3 Zoll breite Latten bekommen, die nöthigen Nägel aber selbst erkaufen sollte. Er verlangte dagegen 18 Thlr., erbot sich jedoch: wenn man ihm $5\frac{1}{4}$ ßo. 4 Zoll breite Latten gäbe, die Arbeit für jenen Preis zu fertigen, indem er im letzteren Falle so viel an Nägeln zu ersparen gedenke. Nun kostet das ßo. 3zollige Latten in dasiger Gegend 2 Thlr. 12 gr., das ßo. 4zollige dagegen 3 Thlr. 4 gr.; würde man nun wohl besser thun, dem Zimmermann 1 Thlr. 8 gr. mehr, oder statt der 3zolligen Latten, 4zollige zu geben?

Aufl. $6\frac{2}{3}$ ßo. à $2\frac{1}{2}$ Thlr. betragen 16 Thlr. 16 gr.
$5\frac{3}{4}$ = à $3\frac{1}{6}$ = = 18 = 5 =

Der Mehraufwand wäre also in dem Falle 18 Thlr. 5 gr. — 16 Thlr. 16 gr. = 1 Thlr. 13 gr. Der Zimmermann aber verlangt nur 1 Thlr. 8 gr. mehr, folglich ersparte man bei letzterem Vertrage 5 gr.

§. 55.

Uebungs-Aufgaben über die einfache Regeldetri sowohl, als die zusammengesetzte, mit geraden und ungeraden Verhältnissen.

1ste Aufgabe. Ein 360 Ellen langer, 4 Fuß breiter Graben, wurde an der einen Seite einer Cultur aufgeworfen, und zwar mit einem Aufwande von 6 Thlrn. 9 gr.; mit einem gleichen Aufwand soll ein 480 Ellen langer Graben auf der andern Seite dieser Cultur aufgeworfen werden, und zwar will man das, was durch die größere Länge an Arbeitslöhnen mehr erfordert wird durch eine geringere Breite zu ersparen suchen; wie breit wird daher der zu ziehende Graben gefertigt werden können?

Antw. 3 Fuß.

2te Aufgabe. Zur Anpflanzung einer Allee, die 600 Ruthen lang ist, braucht man 910 Stämme, wenn solche an der Seite derselben in einer Entfernung von 10 Ellen aus einander gepflanzt werden; wieviel wird man davon brauchen, wenn diese Entfernung nur 7 Ellen betragen soll? — die Ruthe zu 7 Ellen, 14 Zoll gerechnet?

Antw. 1300 Stück.

3te Aufgabe. Von einem Revier wurden zeither 570 Klftrn. fichtene Scheite in $\frac{8}{4}$ell. Scheitlänge abgegeben; diese Abgabe soll in der Folge in $\frac{6}{4}$ell. Klftrn. geschehen; wieviel wird man von letzteren zu schlagen haben, da sich der Inhalt einer $\frac{8}{4}$ell. Klftr. zu dem einer $\frac{6}{4}$ell. verhält wie 25 : 19?

Antw. 750 Klftrn.

4te Aufgabe. Von einem Revier erhält ein Hammerwerk jährlich 140 Klftrn. $\frac{6}{4}$ell. fichtene Scheite als Deputat. In der Nähe dieses Werkes aber stehen eben 360 Klftrn. $\frac{7}{4}$ell. dergl. Scheite, die wegen des darinnen befindlichen Borkenkäfers diesem Hammerwerke im Voraus auf sein Depntat verabreicht werden sollen; auf wieviel Jahre hinaus bekommt dieses Werk dadurch sein Deputatholz?

Antw. Auf 3 Jahr.

5te Aufgabe. Wieviel Interessen wird ein Kapital von 3000 Thlrn., das zu 4 p. C. ausgeliehen ist, in $4\frac{1}{2}$ Jahren bringen?

Antw. $\frac{3000 \times 4 \times 4\frac{1}{2}}{100} = 540$ Thlr.

6te Aufgabe. Zu wieviel pr. C. wird man ein Kapital von 4800 Thlrn. ausleihen müssen, um in $5\frac{1}{2}$ Jahren 924 Thlr. Zinnsen von demselben zu erhalten?

Antw. $\frac{924 \times 100}{4800 \times 5\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{2}$ p. C.

7te Aufgabe. Ein Holzhändler kauft auf einem, 2 Meilen von seinem Wohnorte entfernten Reviere 60 Klftrn. ¼ellige weiche Scheite, die Klafter zu 2 Thlr. 8 gr.; er bezahlt für die Klafter 1 Thlr. 4 gr. Fracht, und wünscht an seinem Verlage 15 pro Cent zu gewinnen; wie theuer wird er die Klafter verkaufen müssen?

Antw. Zu 4 Thlr. — gr. $7\frac{1}{5}$ pf.

8te Aufgabe. Auf einem Revier sind jährlich 24 Thlr. zur Cultur der nicht von Natur besäten Gehaue bestimmt; davon sind zeither im Durchschnitt jährlich $4\frac{1}{2}$ Ack. in Bestand gebracht worden. Die Umstände erfordern jedoch, daß die nächsten 3 Jahre, jedes Jahr 5 Ack. 75 □R. cultiviret werden; um wieviel würde das bestimmte Quantum jedes Jahr überstiegen werden?

Antw. Um 4 Thlr.

9te Aufgabe. Zur Cultur einer Blöße sind 28 Thlr. 12 gr. bestimmt; säet man auf jeden Acker derselben $\frac{3}{4}$ Schfl. Fichtensaamen, so braucht man 3 Schfl. Saamen; dann aber betragen die Culturkosten gerade 30 Thlr.; man will daher nur $\frac{3}{8}$ Schfl. auf den Acker säen; wieviel braucht man dann? und wird in diesem Falle jenes Geld zulangen, wenn der Schfl. Saamen 3 Thlr. kostet?

Antw. Man bedarf $2\frac{1}{2}$ Schfl. Saamen, und diese kosten 7 Thlr. 12 gr., also 1 Thlr. 12 gr. weniger, als die, bei erstever Annahme verwendeten 3 Schfl.; das bestimmte Geld geht daher gerade auf.

10te Aufgabe. Ein Privatmann hat sein Kapital zu 3 pro Cent ausgeliehen und zieht davon jährlich 135 Thlr. Interessen. Er wünscht aber für die Folge 202 Thlr. 12 gr. Interessen von diesem Kapital zu erhalten; zu wieviel p. C. wird er dasselbe verleihen müssen?

Antw. Zu $4\frac{1}{2}$ p. C.

11te Aufgabe. Wenn der Cubikfuß grünes Kiefernholz $60\frac{1}{4}$ Pfund wiegt; wieviel Zentner (à 110 Pfd.) werden 2 Klft. dergl. $\frac{6}{4}$ell. Holz, jede zu 75 Cubikfuß, wiegen?

Antw. $82\frac{7}{44}$ Zentner.

12te Aufgabe. Zum Verschlagen eines Eichelkamps braucht man 460 Stück 4zollige Latten, wenn selbige 6 Zoll weit aus einander geschlagen werden; wenn nun die Latten 8 Zoll weit aus einander genagelt würden, wieviel würde man deren sodann bedürfen? Antw. 345.

13te Aufgabe. Man hat 640 Stück Bäume zu Anpflanzung einer Allee erhalten; pflanzt man selbige 8 Fuß weit aus einander, so fehlen 48 Stück; man will selbige nunmehro 10 Fuß von einander entfernt pflanzen; wieviel Stück braucht man? Antw. 512.

14te Aufgabe. Zur Aufwerfung eines 460 Ellen langen, 2 Ellen breiten und 1 Elle tiefen Grabens waren 10 Thlr. 16 gr. bewilliget worden; man sieht aber, daß man mit diesem Gelde nicht auskommt, und will, da man an der Länge und Tiefe nichts abbrechen kann, etwas weniger Breite annehmen. Bei der oben angegebenen Breite brauchte man jedoch gerade 2 Thlr. 8 gr. mehr, als das bewilligte Geld besagt; wie breit wird der Graben werden müssen, wenn jenes Geld langen soll?

Antw. $1\frac{2}{3}\frac{5}{9}$ Elle.

15te Aufgabe. Ein Graben von 3 Fuß Breite und 180 Ruthen Länge (die Ruthe zu 12 Fuß) verursachte beim Aufwerfen einen Aufwand von 25 Thlrn. 8 gr. Zur Hebung eines andern Grabens, der 4 Fuß Breite haben soll, ist dasselbe Geld bewilliget; wie lang wird man diesen letztern Graben, bei gleicher Tiefe, machen können? Antw. 135 Ruthen.

16te Aufgabe. Was kostet der Cubikfuß Eichenholz, wenn 20 Klftr. $\frac{5}{4}$ell. dergl. Holzes für 83 Thlr. 8 gr. verkauft werden, da man vorher, als man die $\frac{7}{4}$ell. Klafter Eichenholz mit 3 Thlr. 12 gr. bezahlte, den Cubikfuß um 9 pf. verkaufte?

Antw. 1 gr. 3 pf., wenn dabei auf die mehr oder wenigern Zwischenräume der Klaftern keine Rücksicht genommen wied.

17te Aufgabe. Um 30 Klaftern Scheitholz $2\frac{1}{2}$ Meile weit zu fahren, erhält ein Fuhrmann 13 Thlr. 8 gr.; wieviel wird derselbe nach diesem Accord erhalten müssen, um 48 Klftr. $3\frac{3}{4}$ Meile weit zu fahren? Antw. 32 Thlr.

18te Aufgabe. Um u2 Klftrn. weiches $\frac{7}{4}$ell. Scheitholz 2 Stunden weit zu fahren, erhielt ein Bauer 4 Thlr. 12 gr. Fuhrlohn. Man will einigen andern Bauern das Fuhrlohn von 30 Klftrn. $\frac{5}{4}$ell. hartem Scheitholz, das $3\frac{1}{2}$ Meile weit gefahren werden soll, im Verhältniß zu ersterem Accorde verdingen und nimmt dcbei an, daß sich die Schwere eines Cubikfußes harten, zu der eines Cubikfußes weichen Holzes wie 8 zu 3 verhalte; wieviel wird man diesen Bauern geben können?

Antw. 540 Thlr.

19te Aufgabe. Von einem Revier werden jährlich 150 Klftrn. harte $\frac{6}{4}$ell. Scheite an Deputatisten abgegeben. Die Bewirthschaftung dieses Reviers erfordert jetzt, daß diese Deputate für die nächsten 3 Jahre in $\frac{7}{4}$ell. weichen Klftrn. abgegeben werden. Wenn nun die Klftr. harte $\frac{6}{4}$ell. Scheite zu 66 Cbkfß., die Klftr. weiche $\frac{7}{4}$ell. zu 84 Cbkfß. wirklicher Holzmasse angenommen wird und der Preis eines Cubikschuhes harten Holzes 16 pf., der eines weichen aber 9 pf. ist; wieviel Klftrn. $\frac{7}{4}$ell. weiche Scheite werden jene Deputatisten bekommen müssen?

Antw. $628\frac{4}{7}$ Klftr.

Anmerk. Diese Aufgabe ist leichter nach §. 56 aufzulösen.

20ste Aufgabe. Ein Kapital, das zu $3\frac{1}{2}$ p. Cent ausgeliehen ist, hat binnen 9 Monaten 60 Thlr. Zinnsen eingebracht; wie groß ist dieses Kapital?

Antw. 2285 Thlr. 17 gr. $1\frac{1}{7}$ pf.

21ste Aufgabe. Ein Holzhändler kaufte 150 Klftrn. Scheite, die Klftr. zu 2 Thlr. 6 gr.; er gedenkt selbige in 9 Monaten wieder abzusetzen, will jedoch dabei sein Geld so angelegt wissen, daß es ihm jährlich 8 p. C. rentiret; wie theuer wird er die Klftr. verkaufen müssen? Antw. 2 Thlr. 9 gr. $2\frac{2}{2}\frac{2}{5}$ pf.

22ste Aufgabe. Ein 450 Ellen langer, 2 Ellen breiter und $1\frac{1}{4}$ Elle tiefer Graben, der um eine Eichelsaat gezogen wurde, kostete 41 Thlr. 8 gr. bei einem Tagelohn von 5 gr. 6 pf.; was wird ein andrer Graben der 600 Ellen lang, $1\frac{1}{4}$ Elle breit und 1 Elle tief ist, kosten, wenn man einem Tagelöhner täglich 6 gr. bezahlet? Antw. 36 Thlr. 1 gr. $8\frac{5}{5}\frac{2}{5}$ pf.

23ste Aufgabe. Bei Auspflanzung einer Blöße von 4 Ack. 150 □R. pflanzte man die Pflanzen $4\frac{1}{2}$ Fuß weit im Verband, brauchte also pr. Ack. $65\frac{7}{1\frac{1}{2}}$ ßo. und zahlte, weil selbige ganz in der Nähe zu haben waren, für das ßo. zu pflanzen 2 gr. Eine andre Blöße, von 7 Ack. 100 □R. soll ebenfalls ausgepflanzt werden, doch sind hier die Pflanzen nur in der Entfernung von einer Stunde zu haben, man muß deßhalb 2 gr. 9 pf. für das ßo. zu pflanzen geben, will aber die Pflanzen in $5\frac{1}{2}$ Fß. weiter Entfernung im Verband pflanzen, braucht also pr. Ack. nur 43,9 ßo.; was wird bei jeder dieser Blößen der Acker, und was kostet jede Blöße im Ganzen zu bepflanzen?

Antw. Bei den ersteren kostet der Ack. 5 Thlr. 11 gr. 2 pf. und die ganze Blöße 24 Thlr. 14 gr. 3 pf.; bei letzterer kostet der Acker 5 Thlr. — gr. 8,7 pf. und die ganze Blöße 36 Thlr. 21 gr. 3,8 pf.

24ste Aufgabe. Ein Forstbedienter erhält Verordnung, einem Deputatisten, der jährlich 24 Klftrn. buchene $\frac{8}{4}$ell. Scheite erhält, sein Deputat für die nächsten $2\frac{1}{2}$ Jahr in fichtenen $\frac{6}{4}$ell. Scheitklaftern so zu übergeben, daß derselbe nichts verliert. Nun verhält sich in dasiger Gegend der Preiß des buchenen Holzes zum fichtenen wie 7 zu 5, der Inhalt einer buchenen $\frac{8}{4}$ell. Klafter aber zu dem einer fichtenen $\frac{6}{4}$ell. wie 4 zu 3; wieviel Klftrn.

der letzteren Sorte wird jener Deputatist auf 1 Jahr, und wieviel im Ganzen erhalten müssen?

Antw. $44\frac{4}{5}$ Klftrn. auf 1 Jahr und 112 Klftrn. auf $2\frac{1}{4}$ Jahr.

25ste Aufgabe. 180 Klftrn. $\frac{2}{4}$ell. Scheitholz wurden, die Klftr. für 4 Thlr. 12 gr. mit der Bedingung erkauft; daß sie der Verkäufer in dem, $1\frac{1}{2}$ Stunde entfernten Wohnort des Käufers ohnentgeldlich abführe. Späterhin konnte der erstere diese Bedingung nicht erfüllen, erbot sich aber, dem Käufer die Klftr. auf der Stelle für 3 Thlr. 8 gr. zu überlassen. Letzterer hatte nun zwar aus diesem Walde noch kein Holz erhalten, zahlte jedoch immer für die $\frac{6}{4}$ell, Klftr. dergl. Scheite, die er aus einem, 1 Stunde von seinem Wohnorte entfernten Walde erhielt, 18 gr. Fuhrlohn. Konnte derselbe, im Verhältnisse zu letzterem Fuhrlohn, jene Klftrn. für das Anerbieten des Verkäufers übernehmen, ohne sich zu schaden, oder mußte der Verkäufer noch mehr an dem Preise fallen lassen?

Antw. Das Fuhrlohn für die Klftr. $\frac{2}{4}$ell. Holz beträgt, im Verhältniß zu dem für die $\frac{6}{4}$ell. Klftr. angegebenen, 1 Thlr. 16 gr. 6 pf. Die Klftr. käme also 3 Thlr. 8 gr. + 1 Thlr. 16 gr. 6 pf. = 5 Thlr. — gr. 6 pf.; der Verkäufer mußte demnach die Klftr. noch um 12 gr. 6 pf. wohlfeiler, nämlich für 2 Thlr. 19 gr. 6 pf. ablassen.

26ste Aufgabe. Zu Hebung der Entwässerungsgräben auf einem sumpfig gelegenen Revier sind jährlich 24 Thlr. bewilliget; zeither hatte man für dieses Geld immer 192 Ellen Gräben, die $2\frac{1}{2}$ Elle breit und $1\frac{1}{2}$ Elle tief waren, gehoben; findet aber, daß im Verhältniß zum Ganzen zu wenig Gräben gehoben werden. Einer der Gräbenmacher erbietet sich, für obiges Geld 400 Ellen Gräben zu heben, wenn er diese nur $1\frac{3}{4}$ Elle breit und $1\frac{1}{4}$ Elle tief machen dürfte. Kann man, ohne im Verhältniß zum ersteren Accorde einzubüßen, dieses Anerbieten annehmen oder nicht?

Antw. Die letzteren Gräben würden 29 Thlr. 4 gr. kosten, man würde also bei diesem Anerbieten 5 Thlr. 4 gr. ersparen.

27ste Aufgabe. Ein auf Eichenniederwald bei 40jährigem Umtriebe bewirthschaftetes Revier von 160 Ack. Fläche, gab zeither im Durchschnitt pr. Ack. 20 Klftrn. Stangenholz und 140 ßo. Reißig. Der Verkaufspreis einer Klftr. Stangenholz ist in der Gegend 4 Thlr., der eines ßo. Reißigs 1 Thlr. 12 gr. incl. der Holzfällerlöhne, die pr. Klftr. 8 gr., pr. ßo. Reißig aber 6 gr. betragen. Wieviel Ack. werden jährlich mit Nachhalt abgetrieben werden können? wieviel werden davon Klftrn. und Reißigschocke erhalten werden? wie groß ist der reine jährliche Nutzen, den dieser Wald bringt? und was ist der Werth des Waldes zu 5 pro Cent?

Antw. 4 Ack. können abgetrieben werden, diese geben 80 Klftrn. und 560 Reißigschocke; diese bringen einen reinen Nutzen von 993 Th. 8 gr.; der Wald ist demnach 19866 Tr. 16 gr. werth.

28ste Aufgabe. Zwei Holzempfänger wollen mit den, auf zwei verschiedenen Revieren erhaltenen Hölzern deshalb einem Tausch treffen, weil das Holz, was A erhalten hat, dem Wohnorte das B weit näher stehet, und so auch umgekehrt; das aber, was der eine mehr als der andere zu fordern hat, sich gegenseitig mit baarem Gelde vergüten. Da beide Reviere eine verschiedene Holztaxe haben, so sind sie mit einander übereingekommen, den Cbkfß. buchenen Holzes zu 1 gr. 3 pf., den Cbkfß. fichtenes aber zu 9 pf. beim Tausch im Anschlag zu bringen; nun hat A 30 Klftr. $\frac{5}{4}$ell. fichtene Scheite à 75 Cbkfß., B aber 16 Klftrn. $\frac{5}{4}$ell. buchene Scheite à 100 Cbkfß.; welcher wird dem Andern herausgeben müssen, und wieviel?

Antw. A gibt an B noch 13 Thlr. — gr. 6 pf.

29ste Aufgabe. Zwei Grundbesitzer besitzen jeder eine, von dem zu ihren Guthe gehörigen Hauptwalde, sehr entfernt gelegene Waldparcelle, und zwar liegt die, dem A gehörige, nahe an dem Walde des B, und so umgekehrt. Beide sind übereinge-

kommen, diese Parcellen unter folgenden Bedingungen gegenseitig zu vertauschen. Die Parcelle des A hat 7 Ack. 150 □R. und ist mit haubarem Niederwald bestanden, von dem beim vorigen Abtriebe der Ack. im Durchschnitt 81 Thlr. 8 gr. rentirte. Die Parcelle des B hat 9 Ack. 180 □R., wovon 4 Ack. mit Fichtensaaten, 5 Ack. 180 □R. aber mit haubarem Fichten bestanden sind; von den ersteren 4 Ack., die mit den jetzt noch bestandenen von gleicher Beschaffenheit waren, gab der Ack. einen reinen Nutzen von 240 Thlrn. Beide Besitzer sind nun übereingekommen, daß B noch so viel Ack. von den, mit haubarem Fichten bestandenen 5 Ack. 180 □R. abtreiben und das Holz benutzen soll, bis der Werth des noch stehenbleibenden Holzes mit jenem des A gleich ist; für den Ueberschuß der Ackerzahl aber will A an B noch überdies pro Ack. 30 Thlr. geben; wieviel beträgt der Ueberschuß des Holzes von B zu Geld angeschlagen? wieviel Ack. wird deshalb B noch abtreiben müssen? und was wird A für den Ueberschuß der Ackerzahl an B zu zahlen haben?

Antw. Der Ueberschuß des Holzes, zu Geld angeschlagen, beträgt 734 Thlr., folglich muß B noch $3_{\frac{7}{120}}$ Ack. abtreiben und A hat überdies noch für $2_{\frac{1}{10}}$ Ack. 63 Thlr. an B zu bezahlen.

30ste Aufgabe. Ein Holzhändler kaufte das Holz von einem, mit haubaren Fichten bestandenen Distrikt von 2 Ack. 150 □R. Fläche für 900 Thlr. Von diesem Holze erhielt derselbe 180 Klötzer, die er, das Stück zu 1 Thlr. 6 gr. im Durchschnitt; an einen in der Nähe wohnenden Müller verkaufte, dieser bezahlte auch für das Reißig und die ungerodeten Stöcke eine Summe von 220 Thlr. Der Holzhändler erhielt nun überdies noch 220 Klftrn. ¼ell. Scheite, hatte aber außer der Kaufsumme noch 6 Thlr. 16 gr. Anweisegeld, das Schlägerlohn für obige 220 Klftr. Scheite, à 7 gr., und das Ausschneiderlohn für 180 Klötzer, à 1 gr. zu, bezahlen. Wenn nun derselbe im Ganzen 200 Thlr. an diesem Kaufe gewinnen will, wie theuer wird er die Klftr. verkaufen müssen? Antw. Für 3 Thlr. 8 gr.

§. 56.

D. Aufgaben über die Reduction der Gewichte, Gelder und Längenmaaße.

Bei den hier folgenden Aufgaben ist nur die Fertigung des Ansatzes von den, unter A, B und C gegebenen, verschieden; alles andre aber, was dort gesagt ward, gilt auch hier. Der Ansatz wird nämlich nach der sogenannten Kettenregel *) gebildet. In allen Aufgaben dieser Art fragt man, wieviel eine in der Aufgabe angegebene Größe Einheiten andrer Art enthält, die mit jener Größe durch gewisse Verhältnisse in Verbindung stehen. Die Bildung des Ansatzes wird mit der gegebenen Frage (x) angefangen, indem man diese links oberhalb des gezogenen Verticalstriches setzt; rechts des Striches, eine Stelle tiefer, kommt dann die Anzahl Einheiten zu stehen, welche in x verwandelt werden sollen, (worauf sich x bezieht). Nun untersucht man, wieviel eine Einheit (oder mehrere Einheiten) der rechts gesetzten Art, Einheiten der gesuchten enthält. Hierbei sind zwei Fälle möglich; das Verhältniß, in welchem die Einheit der bekannten Art zur gesuchten Art steht, ist nämlich: a) einfach, oder b) zusammengesetzt.

Im ersten Fall ist die Fertigung des Ansatzes dadurch beendigt, daß der rechts angesetzten Größe gegenüber die mit ihr gleichnamige Einheit (oder Einheiten), und x gegenüber die mit diesen gleichnamige Größe gesetzt wird. Wäre z. B. die Aufgabe gegeben: wieviel Thlr. betragen 750 fl., wenn 3 fl. 2 Thlr. ausmachen? so stände der Ansatz

x Thlr.	2 Thlr.
3 fl.	750 fl.

Im zweiten Fall hingegen setze man der rechts angesetzten Größe ihre gleichnamige Einheit links gegenüber. Unter diese

---

*) Der Name Kettenregel stammt von dem Verfahren beim Bilden des Ansatzes; es werden nämlich die einzelnen Theile desselben immer abwechselnd rechts und links des Striches, gleich wie die Glieder einer Kette angesetzt.

beiden Größen setze man das Verhältniß (oder die Verhältnisse, wenn noch mehrere vorhanden sind), welches zwischen der links angesetzten Einheit und der in der Aufgabe gegebenen Größe von x statt findet, und zwar auf gleiche Art, wie beim ersten Fall.

Ein Beispiel möge auch dieses Verfahren versinnlichen. Es sey folgende Aufgabe gegeben: Wieviel sächsische Ellen betragen 10 rheinische Ruthen, wenn 1 rhein. Ruthe = 12 rhein. Fuß, der rhein. Fuß = 139 Pariser Linien, der sächs. Fuß aber = 125 dergl. Linien, die sächs. Elle hingegen 2 Fuß enthält?

Die Frage lautet hier: wieviel sächs. Ellen machen 10 rhein. Ruthen? Dieses stände angesetzt:

x sächs. Ell.	10 rh. Ruth.

Es heißt ferner: wenn 1 rh. Ruthe = 12 rh. Fuß; dieses stände, in Verbindung mit ersterem:

x sächs. Ell.	
1 rh. Ruthe	10 rh. Ruth.
	12 rh. Fuß.

Es heißt ferner: und 1 rhein. Fuß = 139 Par. Linien; dieses angesetzt, stände:

x s. Ell.	
1 rh. R.	10 rh. Ruth.
1 rh. F.	12 rh. Fuß.
	139 Par. L.

Es heißt ferner: und 135 Par. Lin. = 1 sächs. Fuß; der Ansatz wäre also:

x s. Ell.	
1 rh. R.	10 rh. R.
1 rh. F.	12 rh. F.
125 P. L.	139 Par. L.
	1 s. Fuß.

Und endlich sind 2 sächs. Fuß = 1 sächs. Elle = derjenigen Größe, die gleichnamig mit x; der beendigte Ansatz stände demnach:

x sächs. Ell.	1 sächs. Elle.
1 rh. Ruth.	10 rh. Ruth.
1 rh. Fuß	12 rh. Fuß
125 Par. L.	139 Par. L.
2 sächs. Fuß	1 sächs. Fuß.

Bei dem Kettenansatz sind alle Verhältnisse gerade angesetzt, es finden demnach keine Umwendungen statt; ist der Ansatz aber richtig gebildet, so müssen, wie bei den früheren Ansätzen, stets Größen, welche gleichnamige Einheiten haben, einander gegenüber stehen.

1ste Aufgabe. Wieviel machen 30 Berliner Ruthen an sächsischen, da die Berliner Ruthe 12 Fuß, der Fuß 139 Pariser Linien, die sächs. Ruthe aber $15\frac{1}{6}$ Fuß, und dieser 125 Pariser Linien hat?

Aufl.		
	x sächs. Ruth.	1 sächs. Ruthe.
	1 Berl. Ruth.	30 Berl. Ruth. 6
	1 Berl. Fuß	12 Berl. Fuß.
25	x 25 Par. L.	139 Par. L.
$\frac{91}{6}$	$= x5\frac{x}{6}$ s. F.	1 sächs. Fuß. 6

$25 \times 91 = 2275 :: 139 \times 12 \times 6 \times 6 = 60048$ und
$60048 : 2275 = 26\frac{898}{2275}$ sächs. Ruth.

2te Aufgabe. Wieviel betragen 250 rhein. Gulden an sächs. Thalern, wenn der rhein. Gulden 50 Kreuzer, der sächs. Thaler aber 90 Kreuzer gilt?

Aufl.		
	x sächs. Thlr.	1 sächs. Thlr.
	1 rhein. fl.	250 rhein. fl.
	90 Kreuzer.	50 Kreuzer.

$9 :: 250 \times 5 = 1250$ und
$1250 : 9 = 138\frac{8}{9}$ Thlr. $=$ 138 Thlr. 21 gr. 4 pf.

3te Aufgabe. Wieviel sächs. Zentner erhält man für 3000 dänische Pfunde, wenn sich das dänische Pfund zum sächsischen wie 2598 : 2429 verhält, 110 sächs. Pfunde aber einen sächs. Zentner ausmachen?

Aufl.		
	x sächs. Zentn.	1 sächs. Zentn.
	1 dän. Pfund	3000 dän. Pf.
	2429	2598 Theile.
	110 s. Pfund	1 s. Pfund.

$2429 \times 11 = 26719 :: 2598 \times 300 = 779400$ und
$779400 : 26719 = 29\frac{4}{26}\frac{54}{719}$ sächs. Zentn. $=$ 29 Zentn. 18 Pfund $23\frac{7}{24}\frac{9}{29}$ Loth.

4te Aufgabe. Wieviel sächsische Thaler erhält man für 50 römische Ducati, wenn 1 Ducati = 5 rhein. Gulden, der rhein. Gulden aber sich zum sächs. Thlr. wie 5 : 9 verhält?

Antw. 138 Thlr. 21 gr. 4 pf.

5te Aufgabe. Wieviel betragen 48 Magdeburger Ruthen an sächs. Ellen, wenn die Magdeburger Ruthe 12 Fuß, die sächs. Elle aber 2 Fuß hat, und der Magdeburger Fuß sich zum sächsischen wie 137 : 125 verhält? Antw. $315\frac{8}{12}\frac{1}{5}$ sächs. Ell.

6te Aufgabe. Wie verhält sich die rhein. Ruthe zu der sächsischen, da erstere 12 rhein., letztere $15\frac{1}{6}$ sächs. Fuß enthält, der rhein. Fuß aber zu dem sächs. wie 139 : 125 sich verhält?

Antw. Die rhein. Ruthe verhält sich zu der sächsischen wie 10008 : 11375; dieses Verhältniß nach §. 20 verkleinert, gibt das Verhältniß der rheinischen zur sächs. Ruthe 183 : 208 bis auf 0,000017 ..., genau; minder genau ist dasselbe 22 : 25.

7te Aufgabe. Das Pfund Berliner Handelsgewichts verhält sich zu dem des Leipziger wie 9750 : 9716; wieviel betragen 14 Zentner 50 Pfund Leipziger Handelsgewicht, den Zentner zu 110 Pfund gerechnet, an Berliner Zentnern, den Zentner zu 100 Berl. Pfund gerechnet? Antw. $15\frac{6}{8}\frac{8}{12}\frac{6}{5}\frac{2}{}$ Berl. Zentn.

8te Aufgabe. Wie verhält sich der französ. Mètre zur sächs. Ruthe, da derselbe = 3,078444 alte franz. Fuß, der alte franz. Fuß aber sich zum sächsischen wie 1440 : 1252 verhält, und die sächs. Ruthe = $15\frac{1}{6}$ sächs. Fuß?

Antw. Wie 20779497 : 89009375, oder nach §. 20 abgekürzt, wie 4 : 17, wie 13 : 55, oder wie 257 : 1088.

9te Aufgabe. Ein franz. Kilogramm wiegt 30799 holländische Aß, das Pfund Leipziger Handelsgewicht aber wiegt 9716 dergl. Aß; wieviel Pfund Leipziger Handelsgewicht werden 280 Kilogramme betragen? Antw. $599\frac{1}{3}\frac{3}{9}\frac{7}{9}$ Pfund.

10te Aufgabe. Wieviel betragen 90 Berliner Scheffel an

Dresdner Scheffeln, da sich ersterer zum letzterem verhält wie 275892 : 536175? Antw. $46\frac{3694}{11913}$ Dresdn. Schfl.

Anmerk. Hier sollte nun eigentlich die Reduction der Flächen- und Körpermaaße, bei denen die Verhältnisse in Längenmaaßen angegeben sind, folgen; ich habe selbige aber erst im 4ten Kap. des 8ten Abschnitts aus dem Grunde abgehandelt, weil dort bei Lösung dieser Aufgaben dem Anfänger zugleich eine vortheilhafte Anwendung der Logarithmen gezeigt werden kann.

Zweites Kapitel.

Einfache und zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung.

§. 57.

Wenn eine beliebige Größe A in mehrere ungleiche, doch in einem bestimmten Verhältniß zu einander stehende Theile zu theilen ist, so wird die Rechnungsart, durch welche dies bewirkt wird, die Gesellschaftsrechnung genannt.

Sind die Verhältnisse, in welchen die einzelnen Theile unter sich stehen, gleich in der Aufgabe ausgesprochen, so heißt die Gesellschaftsrechnung einfach; muß aber zu Bestimmung dieser Verhältnisse erst irgend eine Rechnungsoperation, z. B. ein Proportionalansatz angewandt werden, so erhält dieselbe den Namen der zusammengesetzten Gesellschaftsrechnung. Die Größe A, die getheilt werden soll, nennt man gewöhnlich das Ganze.

§. 58.

Regeln zu Auflösung der Aufgaben der einfachen Gesellschaftsrechnung.

1) Man addire die gegebenen Verhältnißzahlen, nach welchen das Ganze getheilt werden soll;

2) dividire durch diese gefundene Summe das Ganze, was getheilt werden soll, und

3) multiplicire mit diesem gefundenen Quotienten jede einzelne Verhältnißzahl, wonach das Ganze getheilt werden soll, so erhält man in dem jedesmaligen Product einen der gesuchten Theile.

1ste Aufgabe. Vier Personen, A, B, C, D, haben in einer gemeinschaftlichen Handlung 3600 Thlr. gewonnen. Zum Kapital dieser Handlung gab A 3900 Thlr., B 4200 Thlr., C 4500 Thlr. und D 6000 Thlr.; wieviel gebührt Jedem nach dem Verhältniß seiner Einlage vom Gewinn?

Aufl. $\left.\begin{matrix}3900\\4200\\4500\\6000\end{matrix}\right\}$ gegebene Verhältnisse.

18600 (erste Regel).

$\frac{3600}{1} : \frac{18600}{1} = \frac{3600}{1} \times \frac{1}{18600} = \frac{6}{31}$ (zweite Regel).

$\left.\begin{matrix}\frac{3600}{1} \times \frac{6}{31} = 754\frac{6}{31} = \text{dem Theil des A}\\ \frac{4200}{1} \times \frac{6}{31} = 812\frac{8}{31} = \quad . \quad . \quad . \quad B\\ \frac{4500}{1} \times \frac{6}{31} = 870\frac{0}{31} = \quad . \quad . \quad . \quad C\\ \frac{6000}{1} \times \frac{6}{31} = 1161\frac{9}{31} = \quad . \quad . \quad . \quad D\end{matrix}\right\}$ dritte Regel.

3600 Thlr. Probe.

2te Aufgabe. Auf 3 Revieren soll eine Holzabgabe von 1200 Klftrn., nach Verhältniß der Größe dieser Reviere, vertheilt werden; nun hat das erste 2400, das zweite 1600 und das dritte 1400 Acker Flächeninhalt; wieviel wird jedes Revier zu jener Summe geben müssen?

Aufl. $2400 + 1600 + 1400 = 5400$ (erste Regel).

$1200 : 5400 = \frac{1200}{5400} = \frac{2}{9}$ (zweite Regel).

$\left.\begin{matrix}\text{Das erste Revier gibt } \frac{2400}{1} \times \frac{2}{9} = 533\frac{1}{3} \text{ Klftr.}\\ \text{" zweite " } \frac{1600}{1} \times \frac{2}{9} = 355\frac{5}{9} \text{ "}\\ \text{" dritte " } \frac{1400}{1} \times \frac{2}{9} = 311\frac{1}{9} \text{ "}\end{matrix}\right\}$ dritte Regel.

1200 Klftr. Probe.

3te Aufgabe. Drei Personen kaufen einen, mit jungen Fichten bestandenen Wald von 120 Ackern für 1746 Thlr. Zu dieser Kaufsumme gab A 450 Thlr., B 540 Thlr. und C den Rest; sie wollen diesen Wald nach Verhältniß der, zur Kaufsumme beigetragenen Gelder unter sich theilen; wieviel Acker bekommt Jeder?

Aufl. Der Theil des C $= 1746 - (450 + 540) = 756$.

Ferner ist: $\frac{120}{1} : \frac{1746}{1} = \frac{120}{1746} = \frac{20}{291}$ Folglich bekommt

A $\frac{450}{1} \times \frac{20}{291} = 30\frac{9}{97}$ Acker,

B $\frac{540}{1} \times \frac{20}{291} = 37\frac{11}{97}$ • und

C $\frac{756}{1} \times \frac{20}{291} = 51\frac{93}{97}$ •

120 Acker Probe.

4te Aufgabe. Man theile $\frac{3}{4}$ in vier Theile, die sich zu einander verhalten wie die Zahlen 3, 4, 5 und 6; diese Theile sind?

Aufl. $3 + 4 + 5 + 6 = 18$.

$$\frac{3}{4} : \frac{18}{1} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{18} = \frac{1}{24}$$

Der erste Theil ist $\frac{3}{1} \times \frac{1}{24} = \frac{1}{8} = \frac{3}{24}$

• zweite • • $\frac{4}{1} \times \frac{1}{24} = \frac{1}{6} = \frac{4}{24}$

• dritte • • $\frac{5}{1} \times \frac{1}{24} = \frac{5}{24} = \frac{5}{24}$

• vierte • • $\frac{6}{1} \times \frac{1}{24} = \frac{1}{4} = \frac{6}{24}$

Probe $\frac{3}{4}$

5te Aufgabe. Der Decimalbruch 0,0625 soll in 4 Theile getheilt werden, die sich zu einander verhalten, wie die Zahlen 2, 5, 7 und 11; diese Theile sind?

Aufl. 0,005; 0,0125; 0,0175; 0,0275.

6te Aufgabe. Eine Summe von 360 Thlr. soll unter 3 Personen so vertheilt werden: daß wenn A 2 Thlr. erhält, B

3 Thlr. und C 5 Thlr. bekommen muß; wieviel bekommt jeder?
Aufl. A 72 Thlr.; B 108 Thlr. und C 180 Thlr.

§. 59.

Regeln zur Auflösung der Aufgaben der zusammengesetzten Gesellschaftsrechnung.

1) Sind die Theile wonach das Ganze getheilt werden soll, durch Verhältnisse bestimmt, die durch das Zusammenwirken mehrerer Ursachen begründet werden, so multiplicire man die, durch mehrere Ursachen bestimmten Verhältnißzahlen bei jedem Theile mit einander und man erhält in den Producten die zusammengesetzten Verhältnißzahlen, nach welchen das Ganze getheilt werden soll. Hat man diese, so verfahre man ganz nach den in vorigem §. gegebenen Regeln. Wäre z. B. bei einem zu vertheilenden Gewinn A, außer der Einlage, die jeder Theilhaber zum Handelskapital gab, auch noch der Zeitraum zu berücksichtigen, in welchem der beigetragene Theil des Kapitals benutzt wurde, so müßten in diesem Fall die gleichen Einheiten der Zeit mit denen des Geldes bei jedem Theilhaber multiplicirt werden, um in den Producten die zusammengesetzten Verhältnißzahlen, nach welchen A getheilt werden soll, zu bekommen. Hätte z. B. der erste a Thlr. auf m Jahr, der zweite b Thlr. auf n Jahr und der dritte c Thlr. auf p Jahr gegeben, so wären die zusammengesetzten Verhältnisse, wonach A zu theilen wäre, beim ersten am, beim zweiten bn und beim dritten cp.

2) Beziehen sich von den, in der Aufgabe gegebenen Verhältnissen nicht alle auf ein Grundverhältniß, so suche man mittelst Proportionalansätzen die andern Verhältnisse dadurch dem Grundverhältniß gemäß zu bestimmen: daß man die Verhältnisse zweier Theile zum Ganzen A als Grundverhältniß annimmt; das 3te, 4te oder $n$te Verhältniß, das sich stets auf eine jener, zum Grundverhältniß angenommenen Größen beziehen muß, betrachte man als das dritte Glied eines zu bildenden Proportionsansatzes und bestimme das vierte Glied desselben nach §. 52; so

erhält man in diesem die dritte der Verhältnißzahlen, nach welchen das Ganze getheilt werden soll. Nimmt man an, daß A in n Theile so getheilt werden soll, daß sich der $n$te zum $n-1$sten Theile vrrhalte, wie $a : b$; der $n-1$ste zum $n-2$ten Theile wie $c : d$, und der $n-2$te zum $n-3$ten oder 1sten Theile wie $e : f$; so wären die Verhältnisse der $n = 4$ Theile zum Ganzen A folgende:

das Verhältniß des $n$ten Theils $= a$
$=$ $=$ $= n-1$sten Theils $= b$
} Grundverhältniß.

Nun verhält sich der $n-1$ste Theil zu dem des $n-2$ten, wie sich $c : d$ verhält, folglich findet man das Verhältniß des $n-2$ten Theils zum Gauzen A durch die Proportion: $c : d = b : x$, wo $x = \frac{db}{c} =$ dem Verhältniß des $n-2$ten Theils zum Ganzen A. Eben so erhält man den $n-3$ten oder 1sten Theil durch die Proportion $e : f = \frac{db}{c} : x$ wo $x = \frac{dbf}{ce} =$ dem Verhältniß des 1sten Theils zum Ganzen A. Die Verhältnißgrößen, wonach das Ganze getheilt werden soll, wären sonach hier: a, b, $\frac{db}{c}$ und $\frac{dbf}{ce}$; sind diese bekannt, so wird der übrige Theil der Auflösung ebenfalls genau nach den im vorigen §. gegebenen Regeln verrichtet.

1ste Aufgabe. Vier Personen gewannen bei einem Handelsgeschäft 1500 Thlr. A gab zum Anlage-Kapital 2000 Thlr. auf $1\frac{1}{2}$ Jahr, B 2500 Thlr. auf 1 Jahr, C 4000 Thlr. auf 6 Monate und D 5000 Thlr. auf 5 Monate; — was gebührt Jedem von dem Gewinn?

Aufl. Die gegebenen Zeiten bringe man vorher auf gleiche Einheiten, gleichviel, ob auf Jahre oder Monate und multiplicire Zeit und Geld mit einander, indem man schließt:

2000 Th. auf 18 Mon. = 2000 × 18 = 36000 Th. a. 1 M.
2500 • • 12 • = 2500 × 12 = 30000 • 1 •
4000 • • 6 • = 4000 × 6 = 24000 • 1 •
5000 • • 5 • = 5000 × 5 = 25000 • 1 •

Es sind aber 36000, 30000, 24000, 25000 die Verhältnißzahlen, wonach das Ganze getheilt werden soll, und deren Summe = 115000. Nun ist $\frac{1500}{1} : \frac{115000}{1} = \frac{1500}{115000} = \frac{3}{230}$; folglich bekommt

A $\frac{36000}{1} \times \frac{3}{230} = 469\frac{1}{2}\frac{3}{3}$ Thlr.
B $\frac{30000}{1} \times \frac{3}{230} = 391\frac{7}{2}\frac{}{3}$ •
C $\frac{24000}{1} \times \frac{3}{230} = 313\frac{1}{2}\frac{}{3}$ •
D $\frac{25000}{1} \times \frac{3}{230} = 326\frac{2}{2}\frac{}{3}$ •

Probe: 1500 Thlr.

2te Aufgabe. Drei Personen besitzen eine Waldparcelle von 180 Acker; davon hat A 45, B 63 Acker und C den Rest zu fordern. Einer oberflächlichen Schätzung zufolge ist der Acker von dem Theile des A 400 Thlr. werth, wenn der Acker von dem Theile des B 360 und der von dem Theile des C nur 300 Thlr. Werth hat. Sie entschließen sich, diesen Wald, wegen unter ihnen entstandener Grenzstreitigkeiten, gleich im Ganzen zu verkaufen, die Kaufsumme aber nach den oben angeführten Verhältnissen unter sich zu theilen. Wider Erwarten bekommen sie 72900 Thlr. für diesen Wald; was gebührt Jedem von der Kaufsumme?

Aufl. C hat 180 — (45 + 63) = 72 Acker Antheil gehabt. Nun sind

45 A. zu 420 Th. so viel werth als 45 × 420 = 18900 A. zu 1 Th.
63 = = 360 = — 63 × 360 = 22680 = = 1 =
72 = = 300 = — 72 × 300 = 21600 = = 1 =

Nun sind 18900 + 22680 + 21600 = 63180, und $\frac{72900}{1} : \frac{63180}{1} = \frac{72900}{63180} = \frac{15}{13}$; folglich bekommt

A $\frac{18900}{1} \times \frac{15}{13} = 21807\frac{9}{13}$ Thlr.

B $\frac{22680}{1} \times \frac{15}{13} = 26169\frac{3}{13}$ " und

C $21600 \times \frac{15}{13} = 24923\frac{1}{13}$ "

Probe 72900 Thlr.

3te Aufgabe. Bei einer Holzauction gab A 10 Klftrn. $\frac{6}{4}$ell. buchene Scheite, B 8 Kl. $\frac{7}{4}$ell. fichtene und C 9 Kl. $\frac{8}{4}$ell. erlene Scheite zum Verkauf. Sämmtliche Scheitklaftern wurden für 108 Thlr. verkauft; die Geber wollten sich nun in diese Summe nach Verhältniß der Klafterzahl, der Scheitlängen und der durchschnittsmäßigen Preise der Holzsorten theilen; wenn nun in dasiger Gegend sich die Preise obiger drei Holzsorten wie die Zahlen 4, 3 und 2 zu einander verhalten; was gebührt Jedem an der Kaufsumme?

Aufl. Es sind

10 Klftr. $\frac{6}{4}$ell. buchene Scheite zu 4 Thlr. so viel werth als $10 \times 6 \times 4 = 240$ Klftr. $\frac{1}{4}$ell. zu 1 Thlr.

8 Klftr. $\frac{7}{4}$ell. fichtene Scheite zu 3 Thlr. so viel werth als $8 \times 7 \times 3 = 168$ Klftr. $\frac{1}{4}$ell. zu 1 Thlr.

9 Klftr. $\frac{8}{4}$ell. erlene Scheite zu 2 Thlr. so viel werth als $9 \times 8 \times 2 = 144$ Klftr. $\frac{1}{4}$ell. zu 1 Thlr.

Es sind aber $240 + 168 + 144 = 552$ und $108 : 552 = \frac{108}{552} = \frac{9}{46}$; folglich erhält A $\frac{240}{1} \times \frac{9}{46} = 46\frac{23}{23}$ Thlr., B $\frac{168}{1} \times \frac{9}{46} = 32\frac{20}{23}$ Thlr. und C $\frac{144}{1} \times \frac{9}{46} = 28\frac{4}{23}$ Th.

4te Aufgabe. Ein Wald von 400 Ackern Fläche soll unter drei Personen so getheilt werden, daß, wenn A 2 Acker bekommt, B 5 Acker erhält; bekommt aber A 7 Acker, so soll C allemal 9 Acker erhalten; wieviel Acker erhält Jeder?

Aufl. Hier kann 2 : 5 oder 7 : 9 als das Grundverhältniß angesehen werden; im ersteren Falle sind 2 und 5 die Verhältnißzahlen der Theile des A und B, und die Verhältnißzahl des dritten Theils erhält man durch die Proportion: „wenn A 7 erhält,

bekommt C 9; was erhält C, wenn A 2 bekommt?" nämlich:

$$7 : 9 = 2 : x \text{ und } x = \frac{18}{7}$$

Im zweiten Fall hat man in 7 und 9 die Verhältnißzahlen der Theile A und C, und man erhält diejenigen für den Theil B durch die Proportion: „wenn A 2 erhält, bekommt B 5; was erhält B, wenn A 7 bekommt?" nämlich:

$$2 : 5 = 7 : x \text{ und } x = \frac{35}{2}$$

Im ersteren Fall wären also die Verhältnißzahlen, nach welchen das Ganze getheilt werden soll, 2, 5 und $1\frac{8}{7}$, im zweiten Fall hingegen 7, $3\frac{5}{7}$ und 9; beide aber geben, wenn nach ihnen getheilt wird, gleiche Resultate. Im ersteren Fall ist nämlich $2 + 5 + \frac{18}{7} = \frac{67}{7}$; im zweiten Fall aber ist $7 + \frac{35}{2} + 9 = \frac{67}{2}$

Nun ist, im ersten Fall, $\frac{400}{1} : \frac{67}{7} = \frac{2800}{67}$; im zweiten Fall $\frac{400}{1} : \frac{67}{2} = \frac{800}{67}$. Im ersten Fall erhielte sonach

A $\frac{2800}{67} \times \frac{2}{1} = 83\frac{39}{67}$ Acker,

B $\frac{2800}{67} \times \frac{5}{1} = 208\frac{46}{67}$ "

C $\frac{2800}{67} \times \frac{18}{7} = 107\frac{31}{67}$ "

Im zweiten Fall erhielte

A $\frac{800}{67} \times \frac{7}{1} = 83\frac{39}{67}$ Acker,

B $\frac{800}{67} \times \frac{35}{2} = 208\frac{46}{67}$ "

C $\frac{800}{67} \times \frac{9}{1} = 107\frac{31}{67}$ "

Es verhalten sich nämlich die Verhältnißzahlen der einzelnen Theile beider Fälle wie die Quotienten; denn es ist:

1) $2 : 7 = \frac{67}{7} : \frac{67}{2}$ oder

2) $5 : \frac{35}{2} = \frac{67}{7} : \frac{67}{2}$ oder

3) $\frac{18}{7} : 9 = \frac{67}{7} : \frac{67}{2}$

5te Aufgabe. Vier Personen sollen 600 Thlr. so unter sich vertheilen, daß sich der Theil des ersten zum Theile des zweiten wie 4 : 3, der Theil des dritten zu dem des zweiten wie 3 : 4, und der Theil des vierten zum Theile des dritten wie 4 : 5 verhalte; wieviel erhält Jeder?

Aufl. Hier finden folgende Proportionen statt. Der Theil des ersten = 4 gibt den des zweiten = 3. Nun soll der dritte 3 Thlr. erhalten, wenn der zweite 4 Thlr. bekommt; was erhält derselbe, wenn letzterer nur 3 Thlr. bekommt? $4 : 3 = 3 : x$ und $x = \frac{9}{4}$ erhält der dritte. Wenn endlich der dritte 5 Thlr. erhält, soll der vierte 4 Thlr. bekommen; was wird letzterer erhalten, wenn ersterer nur $\frac{9}{4}$ Thlr. bekommt? $5 : 4 = \frac{9}{4} : x$ und $x = \frac{9}{5}$ erhält der vierte. Die Verhältnißzahlen sind also:

$$4 + 3 + \frac{9}{4} + \frac{9}{5} = \frac{221}{20}; \text{ und } \frac{600}{1} : \frac{221}{20} = \frac{12000}{221}$$

Des Ersten Theil ist also $\frac{12000}{221} \times \frac{4}{1} = 217\frac{4}{2}\frac{3}{2}\frac{}{1}$ Thlr.

= Zweiten — $\frac{12000}{221} \times \frac{3}{1} = 162\frac{1}{2}\frac{9}{2}\frac{8}{1}$ =

= Dritten — $\frac{12000}{221} \times \frac{9}{4} = 122\frac{3}{2}\frac{8}{2}\frac{}{1}$ =

= Vierten — $\frac{12000}{221} \times \frac{9}{5} = 97\frac{1}{2}\frac{6}{2}\frac{3}{1}$ =

Probe 600 Thlr.

6te Aufgabe. Der Bruch 0,03612 soll in 4 Theile getheilt werden, die in folgenden Verhältnissen zu einander stehen. Der erste Theil verhält sich zum dritten wie 3 : 5, der zweite zum vierten wie 2 : 3, und der dritte zum vierten wie 3 : 4; wie groß ist jeder Theil?

Aufl. Wenn der erste Theil = 3, so ist der dritte = 5, der vierte aber ist $3 : 4 = 5 : x$, wo $x = \frac{20}{3}$, und der zweite ist $3 : 2 = \frac{20}{3} : x$, wo $x = \frac{40}{9}$. Die Verhältnißzahlen sind demnach hier: $3 + \frac{40}{9} + 5 + \frac{20}{3} = \frac{172}{9}$ und

$$0{,}03612 : \frac{172}{9} = \frac{3612}{100000} \times \frac{9}{172} = 0{,}00189.$$

Der erste Theil ist also $0{,}00189 \times 3 = 0{,}00567$
= zweite — $0{,}00189 \times \frac{4}{9} = 0{,}0084$
= dritte — $0{,}00189 \times 5 = 0{,}00945$ und
= vierte — $0{,}00189 \times \frac{2}{3} = 0{,}0126$

Probe 0,03612

7te Aufgabe. Eine Fläche von 360 Ackern soll in 5 Theile so getheilt werden, daß sich der Theil des ersten zu dem des fünften verhalte wie 2 : 3, der Theil des zweiten zu dem des dritten wie 3 : 4, der Theil des dritten zu dem des fünften wie 2 : 5, und der Theil des vierten zu dem des dritten wie 5 : 3; wie groß ist jeder Theil?

Aufl. Der erste Theil $= 79\frac{1}{9}\frac{1}{1}$, der zweite $35\frac{5}{9}\frac{5}{1}$, der dritte $47\frac{4}{9}\frac{3}{1}$, der vierte $79\frac{1}{9}\frac{1}{1}$ und der fünfte $118\frac{6}{9}\frac{2}{1}$ Acker.

8te Aufgabe. Unter vier Forstbedienten eines Amtes soll eine Gratification von 180 Thlrn. nach Verhältniß der Ackerzahl und der Holzart, womit erstere von den Forstbedienten bepflanzt wurde, ausgezahlt werden. Nun hat A 12 Acker Birken, B 10 Acker Fichten, C 6 Acker Buchen und D 5 Acker Eichen angepflanzt. Wenn nun $1\frac{1}{2}$ Acker Fichten $=$ 1 Acker Buchen, $\frac{5}{8}$ Acker Eichen $=$ 2 Acker Birken, und 1 Acker Birken $= \frac{3}{4}$ Acker Fichten angenommen werden; was wird jeder dieser Forstbedienten erhalten?

Aufl. A $40\frac{1}{2}$ Thlr., B 45 Thlr., C $40\frac{1}{2}$ Thlr. und D 54 Thlr.

9te Aufgabe. Drei Personen haben einen Wald, der 36 Acker Fläche hat, für 4800 Thlr. erkauft und wollen denselben nach Verhältniß ihrer Einlage und der Beschaffenheit des Waldes unter sich theilen. Nun finden sich auf diesem Walde 16 Acker, wovon jeder gerade $1\frac{1}{2}$ mal so viel werth ist, als einer der übrigen 20 Acker. Wenn nun A 1600 Thlr., B 2000 Thlr. und C den Rest gegeben hat; wie wird diese Theilung statt finden müssen?

Aufl. Soll Jeder, nach Verhältniß seiner Einlage, einige gute und einige geringere Acker des Waldes bekommen, so betrachte man sowohl die 16, als die übrigen 20 Acker als das zu theilende Ganze, und theile selbiges wie gewöhnlich. Hier würde dann

A $5\frac{1}{3}$ Acker guten, B $6\frac{2}{3}$ Acker guten und C 4 Acker guten,
$6\frac{2}{3}$ = geringen, $8\frac{1}{3}$ = geringen 5 = geringen

Waldboden erhalten. Außerdem könnte man auch schließen: die 16 besseren Acker wären $= 16 \times 1\frac{1}{2} = 24$ geringerem seyn, das zu theilende Ganze wäre daher 44 Acker. Davon bekäme A $14\frac{2}{3}$, B $18\frac{1}{3}$ und C 11 Acker; bei diesen Summen würde aber jeder bessere Acker $= 1\frac{1}{2}$ geringerem zu rechnen seyn.

10te Aufgabe. Auf 3 Forstrevieren sind zusammen 48 Acker Blößen zu cultiviren, wozu die Behörde 288 Thlr. bestimmt hat. Diese Summe soll nach Verhältniß der zu cultivirenden Fläche und der Beschaffenheit des Bodens der Blößen auf diese 3 Reviere vertheilt werden. Nun sind auf dem ersten Reviere 12, auf dem zweiten 16, und auf dem dritten 20 Acker. Die Beschaffenheit des Bodens ist so, daß, wenn auf ersterem Revier der Acker 7 Thlr. kostet, er auf dem zweiten nur 5 und auf dem dritten 6 Thlr. zu cultiviren kosten würde; wieviel Thlr. erhält jedes Revier?

Aufl. Das erste bekommt 82 Thlr. 6 gr. $10\frac{2}{7}$ pf., das zweite 88 Thlr. 3 gr. $11\frac{1}{49}$ pf., und das dritte 117 Thlr. 13 gr. $2\frac{34}{49}$ pf.

11te Aufgabe. Vier Forstdiener, die zusammen 192 Jahre ihre 4 Reviere ehrlich und mit Fleiß verwaltet haben, sollen eine Gratification von 600 Thlrn. bekommen, und zwar sollen die Anzahl der Dienstjahre und die Ackerzahl des Reviers, welches jeder verwaltet hat, den Maßstab der Vertheilung abgeben. Nun hat A sein Revier von 1200 Ack. 52 Jahre, B von 1500 Ack. 50 J., C von 1600 Ack. 48 J., und D von 1100 Ack. 42 Jahre verwaltet; was wird Jeder von der ausgesetzten Gratification erhalten?

Aufl. A erhält 143 Thlr. 18 gr. $8\frac{6}{21}\frac{4}{7}$ pf., B 172 Thlr. 19 gr. $5\frac{2}{21}\frac{7}{7}$ pf., C 176 Thlr. 23 gr. $\frac{1}{2}\frac{2}{1}\frac{}{7}$ pf., und D 106 Th. 10 gr. $10\frac{1}{21}\frac{4}{7}$ pf.

12te Aufgabe. Zwei Personen kaufen einen Walddistrikt von 180 Ack. Fläche für 4800 Thlr. Zu dieser Kaufsumme gab A 3000 Thlr. und B 1800 Thlr. Um die auf diesem Walde vorhandenen Blößen wieder zu bepflanzen, war nach Verlauf eines Jahres die Summe von 900 Thlrn. zum Behuf des bessern Absatzes der Hölzer, ein Floßgraben nöthig, und zur Aufbereitung derselben war nach zwei Jahren wiederum eine Summe von 1200 Thlrn. erforderlich; erstere Summe gab C und letztere D. Sie verkaufen nach drei Jahren, von der Kaufzeit an gerechnet, die geschlagenen Hölzer für 4100 Thlr., verwenden von dieser Summe zwar wieder 100 Thlr. zur Cultur der Gehaue, verkaufen jedoch kurz darauf den Wald für 4400 Thlr., und entschließen sich, nachdem jeder seinen Vorschuß zurückgenommen, den gemachten Gewinn nach Verhältniß der Größe dieses Vorschusses und der Zeit, zu theilen. Was gebührt Jedem an dem Gewinn?

Aufl. Der ganze Gewinn beträgt $(4100 + 4400) - (4800 + 900 + 1200 + 100) = 1500$ Thlr. Davon erhält A 775 Thlr. 20 gr. $8\frac{8}{29}$ pf., B 465 Thlr. 12 gr. $4\frac{2}{2}\frac{8}{9}$ pf., C 155 Thlr. 4 gr. $1\frac{1}{2}\frac{9}{9}$ pf., und D 103 Thlr. 10 gr. $9\frac{3}{29}$ pf.

Vierter Abschnitt.

Von den algebraischen Aufgaben des ersten Grades,

mit einer und mit mehreren unbekannten Größen.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Erklärungen.

---

§. 60.

Die algebraischen Aufgaben unterscheidet man in solche, die auf Gleichungen führen, in welchen die unbekannte Größe in der ersten Potenz erscheint, oder in welcher dieselbe auch in höheren Potenzen stehend, vorkommt, (s. §. 39); jene nennt man Aufgaben vom ersten Grade, diese aber von 2ten, 3ten, 4ten oder *n*ten Grade, je nachdem der höchste Exponent der unbekannten Größe 2, 3, 4 oder *n* ist. Beide unterscheidet man wiederum in Aufgaben mit einer unbekannten Größe und in Aufgaben mit mehreren unbekannten Größen; bei ersteren wird nur nach einer unbekannten Größe gefragt, daher ist auch nur ein einziges Sinnbild (x) für dieselbe in die, aus den Bedingungen der Aufgabe gebildete Gleichung zu setzen; bei letzteren wird nach mehr als einer unbekannten Größe in der Aufgabe gefragt; es müssen also in die zu bildenden Gleichungen auch mehrere Sinnbilder für die unbekannten Größen gesetzt werden.

Oft wird in einer Aufgabe nach zwei unbekannten Größen gefragt, und doch ist dieselbe als eine Aufgabe, die nur eine unbekannte Größe enthält, zu behandeln; wäre z. B. die Aufgabe gegeben: zwei Zahlen zu finden, deren Summe 16, die Differenz aber 2 ist, so wäre, wenn x = der kleineren Zahl, $16 - x$ die größere und $16 - x - x = 16 - 2x$ die Differenz, und da diese $= 2$, so wäre $16 - 2x = 2$, woraus $x = 7$, die kleinere Zahl, und $16 - 7 = 9$, die größere Zahl, erhalten wird. Stehen nämlich in dem Falle die zwei unbekannten Größen in leicht einzusehenden, durch die Aufgabe ausgesprochenen Verhältnissen zu einander, so kann die Lösung der Aufgabe durch Annahme einer unbekannten Größe bewirkt werden.

Bestimmt heißt eine Aufgabe, die zwei oder mehrere unbekannte Größen enthält, wenn aus den, durch sie ausgesprochenen Bedingungen eben so viel Gleichungen gebildet werden können, als unbekannte Größen in der Aufgabe vorhanden sind; im Gegentheil ist die Aufgabe unbestimmt, diaphantisch.

§. 61.

Zu einer algebraischen Aufgabe wird die, zu ihrer Auflösung erforderliche Gleichung (s. §. 39) mittelst der in der Aufgabe ausgesprochenen Bedingungen gebildet, und heißt auch die Gleichung der Bedingnisse, zum Unterschied einer, durch die Reduction schon veränderten Gleichung. Die Urtheilskraft schließt nämlich aus jenen Bedingungen, „in welchen Verhältnissen die gegebenen bekannten Größen zu der zu suchenden unbekannten Größe stehen, und was für Rechnungen mit jenen vorgenommen werden müssen, damit selbige der letzteren gleich gesetzt werden können."

Bei der im vorigen §. gegebenen Aufgabe würden z. B. folgende Vernunftschlüsse zur Bildung der Gleichung der Bedingnisse anzuwenden seyn.

1) Die Bedingungen setzen voraus, daß von den zwei un-

bekannnten Zahlen die eine größer als die andre ist, denn sonst könnte zwischen beiden keine Differenz statt finden.

2) Es folgt ferner, daß die kleinere Zahl und die Differenz zusammen genommen, die größere Zahl ausmachen.

3) Setzen wir daher für die kleinere Zahl das Sinnbild x, so wird, da die Differenz $= 2$, die größere Zahl $= x + 2$ seyn.

4) Da man nun beide Zahlen ausgedrückt hat, so ist es leicht, ihre Summe zu bestimmen; diese ist nämlich $x + (x + 2)$, und da diese Summe $= 16$ seyn soll, so erhält man in $x + (x + 2) = 16$ die verlangte Gleichung, und mit ihr den ersten Theil der Auflösung; der zweite Theil der Auflösung einer jeden algebraischen Aufgabe besteht aber in der Reduction der gefundenen Gleichung (nach §. 39 und sequ.)

Der Anfänger lernt die Gleichung der Bedingnisse oft leichter bilden, wenn er sich die unbekannte Größe als bekannt vorstellt und mit selbiger gleichsam die Probe auf die Aufgabe macht, indem er alle Rechnungen mit der unbekannten Größe vornimmt, die durch die Bedingungen angegeben werden. Bei der hier abgehandelten Aufgabe wäre nämlich also zu verfahren.

Die kleinere Zahl $= x$; folglich die größere $= x +$ der Differenz $= x + 2$; beide Zahlen addirt, geben in $2x + 2$ die Summe dieser Zahlen, diese aber soll $= 16$ seyn, also ist $2x + 2 = 16$ die gesuchte Gleichung.

Zweites Kapitel.

Algebraische Aufgaben des ersten Grades mit einer unbekannten Größe.

---

§. 62.

Von den folgenden 28 Aufgaben sind bei denjenigen die Auflösungen nur in Antwortsform aufgeführt, wo das Bilden der Gleichung entweder nach ähnlichen Bedingungen, wie bei einer vorhergegangenen Aufgabe, bewirkt werden kann, oder wo

dies doch keine besonderen Schwierigkeiten verursacht. Dagegen sind besonders die Auflösungen der ersten 10 Aufgaben ausführlich dargestellt.

1ste Aufgabe. Die Summe zweier Zahlen, ist 36, die Differenz derselben 18; welches sind die Zahlen?

Aufl. Wenn die kleinere Zahl $= x$ gesetzt wird, so ist die größere $= x + 18$; da nun $x + (x + 18) = 36$, so ist $2x + 18 = 36$ u. $x = \frac{36-18}{2} = 9$; und die größere Zahl $= 9 + 18 = 27$.

2te Aufgabe. Die Summe zweier Zahlen $= s$, die Differenz derselben $= d$; welches sind die Zahlen?

Aufl. Nach voriger Aufgabe war $x + (x + d) = s$ und $x = \frac{s-d}{2}$ die kleinere, und $\frac{s-d}{2} + d = \frac{s+d}{2}$ die größere Zahl. Diese Formeln zeigen: daß man aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen die größere Zahl erhält, wenn man die Differenz zur Summe addirt und die erhaltene Summe durch 2 dividirt; die kleinere Zahl hingegen, wenn man die Differenz von der Summe abzieht und den erhaltenen Unterschied durch 2 dividirt.

3te Aufgabe. Es ist eine Zahl zu suchen, die mit 7 dividirt einen eben so großen Quotienten gibt, als der Unterschied beträgt, wenn man 78 von ihr abzieht?

Aufl. Wird die Zahl $= x$ gesetzt, so ist der Quotient $= \frac{x}{7}$ und der Unterschied $= x - 78$, da aber diese zwei Größrn einander gleich seyn sollen, so ist: $\frac{x}{7} = x - 78$ und $x = \frac{546}{6} = 91$. Denn $\frac{91}{7} = 13$ und $91 - 78 = 13$.

4te Aufgabe. 360 soll in 3 Theile getheilt werden, die sich zu einander wie 2, 3 und 4 verhalten; diese Theile sind?

Aufl. Wird der einzelne Theil $= x$ gesetzt, so würde, wenn der erste Theil $= 2x$ ist, der zweite $= 3x$ und der dritte $= 4x$ seyn; da aber diese 3 Theile die gegebene Zahl ausmachen müssen, so ist $2x + 3x + 4x = 360$ und $x = \frac{360}{9} = 40$.

Der 1ste Theil wäre nämlich $= 40 \times 2 = 80$
= 2te = = = $40 \times 3 = 120$
= 3te = = = $40 \times 4 = 160$

Die Summe aller 3 Theile $= 360$

5te Aufgabe. Man theile eine Zahl a in 3 Theile, so, daß sich diese Theile wie die Größen m, n und p zu einander verhalten; diese Theile sind?

Aufl. Der einzelne Theil $= x$, gibt die 3 Theile mx, nx nnd px; nun aber ist $mx + nx + px = a$ und $x(m+n+p) = a$, daher $x = \frac{a}{m+n+p}$

Der 1ste Theil wäre also $= \frac{a}{m+n+p} \times m = \frac{am}{m+n+p}$

= 2te = = = $= \frac{a}{m+n+p} \times n = \frac{an}{m+n+p}$

= 3te = = = $= \frac{a}{m+n+p} \times p = \frac{ap}{m+n+p}$

Es ist aber auch $\frac{am+an+ap}{m+n+p} = \frac{a(m+n+p)}{m+n+p} = a$ *)

6te Aufgabe. Ein Forstbedienter wurde gefragt, wieviel auf seinem Revier jährlich Holz geschlagen würde? — er antwortete: die Hälfte, das Drittel und das Fünftel der geschlagenen Hölzer, auf $\frac{5}{4}$ell. Klaftern reducirt, übertreffen die jährlich zu schlagende Klafterzahl gerade um die, alle Jahre abzugebenden 31 Klftr. Deputatholz; wieviel Klftrn. wurden jährlich geschlagen?

---

*) Durch die Auflösung dieser Aufgabe werden die im §. 58 gegebenen Regeln begründet und bildlich (als Formeln) dargestellt. Ueberhaupt kann jede Aufgabe der Gesellschaftsrechnung mittelst einer algebraischen Gleichung aufgelöst werden.

Aufl. Wird die Klafterzahl $= x$ gesetzt, so ist die Hälfte $\frac{x}{2}$, das Drittel $\frac{x}{3}$ und das Fünftel $\frac{x}{5}$; diese drei Größen zusammen sollen gleich der Summe $x +$ den abzugebenden 31 Klaftern Deputathölzer seyn; daher ist: $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} = x + 31$ und $x = 930$ Klaftern.

Es ist nämlich die Hälfte $= \frac{930}{2} = 465$

das Drittel $= \frac{930}{3} = 310$

das Fünftel $= \frac{930}{5} = 186$

und $930 + 31 = 961$.

7te Aufgabe. Auf einem 1800 Acker großen Forstrevier zählte man noch einmal soviel Acker Nadelwald, als Buchenhochwald, und dreimal soviel Acker Niederwald, als Nadelwald; wieviel Acker wären es von jeder Art?

Aufl. Die wenigsten Acker sind mit Buchenhochwald bestanden; man setze daher diese $= x$, so müssen $2x$ Acker Nadelwald und $6x$ Acker Niederwald vorhanden seyn; also ist $x + 2x + 6x = 1800$ und $x = \frac{1800}{9} = 200$ Acker Buchenhochwald; $2x = 200 \times 2 = 400$ Ack. Nadelwald und $6x = 200 \times 6 = 1200$ Ack. Niederwald.

8te Aufgabe. Eine gewisse Kalfterzahl soll von 2 Parthien Holzmachern in x Tagen anfbereitet werden. Man weiß, daß früher die erste Parthie mit dieser Klftrzahl in $8 = a$ Tagen, die zweite Parthie aber in $13 = b$ Tagen fertig wurde, wenn jede allein darüber arbeitete. Wie lange werden beide Parthieen zubringen?

Aufl. Die erste Parthie macht täglich $\frac{1}{a}$, die zweite $\frac{1}{b}$ Klftr., wenn man die nicht angegebene Klafterzahl $= 1$ setzet; folglich wird in x Tagen die

erste Parthie $\frac{1}{a} \times x = \frac{x}{a}$ Klafter, und die

zweite = $\frac{1}{b} \times x = \frac{x}{b}$ Klafter fertigen.

Nun aber ist $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$ und

$$x = \frac{ab}{a+b} = \frac{8 \times 13}{8+13} = 4\frac{20}{21} \text{ Tag.}$$

Wären 3 Parthien Holzmacher, oder würde gefragt, wie lange 3 Röhren Zeit brauchten, um einen Teich anzufüllen, den die erste Röhre in a, die zweite in b, die dritte in c Tagen füllte, so wäre

$$x = \frac{abc}{ab+ac+bc}$$

9te Aufgabe. Drei Zahlen, deren Summe $= 96$, sind durch folgende Eigenschaften von einander unterschieden; dividirt man die erstere durch 4, so erhält man denselben Quotienten, welchen man bekommt, wenn man die zweite durch 3 dividirt. Bei ersterer Division erhält man jedoch 3 und bei letzterer 4 zum Rest; beide Quotienten sowohl, als die gebliebenen Reste zur dritten Zahl addirt, geben zur Summe 41; welche Zahlen sind dies?

Aufl. Hier bestimmt sich die Gleichung nach dem unbekannten Quotienten der 1sten und 2ten Zahl; setzen wir denselben, da er gleich ist, bei jeder $= x$, so erhalten wir die erste Zahl durch Multiplication des Quotienten mit 4 und Addition des Restes 3, sie ist nämlich $= 4x + 3$; eben so wäre die zweite Zahl $= 3x + 4$, die Summe beider aber wäre $= 7x + 7$. Da die Summe der 3 Zahlen $= 96$, so erhält man die 3te Zahl, wenn man die Summe der ersten 2 von der Summe aller 3 Zahlen abzieht; sie ist nämlich $= 96 - (7x + 7) = 89 - 7x$.
Die Summe der zwei gleichen Quotienten und der zwei Reste aber ist $2x + 7$, und da diese + der 3ten Zahl $= 41$ seyn soll, so ist: $2x + 7 + 89 - 7x = 41$ und $x = 11 =$ dem Quotienten.

Die 1ste Zahl wäre also $11 \times 4 + 3 = 47$
= 2te = = = $11 \times 3 + 4 = 37$
= 3te = = = $96 - 77 - 7 = 12$

Die Summe aller 3 Zahlen = 96.

10te Aufgabe. Einem Boten, der vor 8 Tagen abgegangen war, wird auf demselben Wege und aus demselben Orte ein anderer Bote nachgeschickt, der jenen einholen soll. Wenn nun ersterer täglich 6, letzterer aber 10 Meilen macht; wieviel Tage werden verfließen, ehe letzterer den ersteren einholet?

Aufl. Die Tage, welche bis zur Einholung des zuerst abgesendeten Boten vergehen seyen, $= x$, so wird der erstere Bote $6x$, der letztere aber $10x$ Meilen in dieser Zeit zurücklegen. Da nun ersterer $8 \times 6 = 48$ Meilen voraus hatte, ehe letzterer abging, beide aber in x Tagen (im Moment ihrer Zusammenkunft) eine gleiche Anzahl Meilen gemacht haben müssen, so muß $10x = 6x + 48$ seyn, woraus $x = 12$ Tage. Denn $12 \times 6 + 48 = 120$ Meilen hat der erste Bote in 20 Tagen und $12 \times 10 = 120$ Meilen hat der zweite in 12 Tagen zurückgelegt.

11te Aufgabe. Wenn n die Zahl Tage anzeigt, die der erste Bote, der täglich a Meilen macht, bereits abgegangen ist, ehe ihm der zweite, der täglich b Meilen zurücklegt, nachgesendet wird; wie läßt sich dann die Zahl Tage, nach welchen der letztere den ersteren einholet, allgemein darstellen?

Antw. Durch $x = \frac{an}{b-a}$.

12te Aufgabe. Wenn dieselben Bedingungen, wie in den vorigen 2 Aufgaben, statt finden, der zweite Bote jedoch von einem um $12 = c$ Meilen weiter zurückgelegenen Orte ausginge; in wieviel Tagen würde er dann den ersteren einholen? und was wäre der allgemeine Ausdruck für diese Aufgabe?

Aufl. Hier kann man schließen, daß der erste Bote, wenn der zweite erst fortgeht, $48 + 12 = 60$ Meilen, oder allgemein $an + c$ Meilen bereits zurückgelegt hat; die bei der 10ten Aufga-

be entwickelte Gleichung würde also zu

$10x = 6x + 60$ oder allgemein $bx = ax + an + c$

$4x = 60$ $bx - ax = an + c$

$x = 15$ $x = \frac{an + c}{b - a}$

13te Aufgabe. Wenn die Bedingungen der 10ten Aufgabe statt hätten, jedoch mit dem Unterschied, daß der erste Bote in $5 = d$ Tagen $27 = e$ Meilen und der zweite in $9 = f$ Tagen $97 = g$ Meilen zurücklegte; wenn würde dann der zweite Bote den ersteren einholen? und wie würde dies allgemein ausgedrückt?

Aufl. Wenn der erste Bote in 5 Tagen 27 Meilen zurücklegt, so würde er in 1 Tag $\frac{27}{5} = \frac{e}{d}$ Meilen zurücklegen; er hätte also in den ersten $8 = n$ Tagen bereits $8 \times \frac{27}{5} = \frac{216}{5} = \frac{en}{d}$ Meilen gemacht, ehe der zweite Bote abging. Dieser legte in 9 $= f$ Tagen $97 = g$ Meilen zurück, also täglich $\frac{97}{9} = \frac{g}{f}$; in x Tagen aber machte ersterer $\frac{27x}{5} = \frac{ex}{d}$ und letzterer $\frac{97x}{9} = \frac{gx}{f}$; es wäre daher

$\frac{97x}{9} = \frac{27x}{5} + \frac{216}{5}$, allgemein $\frac{gx}{f} = \frac{ex}{d} + \frac{en}{d}$ und

$x = \frac{1944}{242} = 8_{121}^{4}$ Tage $x = \frac{efn}{dg - ef}$

14te Aufgabe. Wenn nun zu den Bedingungen der vorhergehenden Aufgabe noch die der 12ten Aufgabe beigefügt würde, daß nämlich der Ausgangsort des 2ten Boten und $12 = c$ Meilen weiter rückwärts gelegen wäre; wenn würde dann der zweite Bote den ersteren einholen? und wie würde dies allgemein ausgedrückt?

Antw. In $x = 10_{121}^{32}$ od. allg. $\frac{efn \times cdf}{dg - ef} = \frac{f(en + cd)}{dg - ef}$ Tag.

Wäre aber der Ort, von wo der zweite Bote ausging, um e Meilen vorwärts statt zurück gelegen, so würden diese c Meilen demselben zu Gute kommen, oder, was gleich ist, von den bereits zurückgelegten $\frac{en}{d}$ Meilen des 2ten Boten abgezogen werden müssen. Daher wäre in diesem Fall $x = \frac{f(en-cd)}{dg-ef.}$

15te Aufgabe. Zwei Boten gehen zu gleicher Zeit von von 2, in entgegengesetzter Richtung gelegenen Orten aus; der erste Bote macht täglich $4 = a$ Meilen, der andere $7 = b$ Meilen. Wenn nun die Entfernung dieser beiden Orte $66 = h$ Meilen beträgt; an welchem Tage werden sich die beiden Boten begegnen?

Aufl. Da beide Boten zusammen 66 Meilen machen, der erstere aber in x Tagen $4x$, der zweite $7x$ Meilen macht, so ist $4x + 7x = 66$ oder allgemein $ax + bx = h$ und $x = \frac{66}{11} = 6$ oder $x = \frac{h}{a+b}$.

16te Aufgabe. Wenn zu den Bedingungen der vorigen Aufgabe noch die hinzugefügt würde, daß der erste Bote $5 = n$ Tage früher abgegangen wäre, als der zweite, beide Orte aber lägen nur 64 Meilen entfernt von einander; an welchem Tage, nach dem Ausgang des ersten Boten, würden sich dann diese Boten begegnen?

Aufl. Bezeichnet x die Zahl Tage, die, vom Ausgang des ersten Boten an gerechnet, verfließen, so macht der erste Bote $4x = ax$, der zweite Bote aber geht nur $x - 5$ oder allgemein $x - n$ Tage, er macht daher im Ganzen $7(x-5)$ oder $b(x-n)$ Meilen. Es ist aber:

$4x + 7(x-5) = 64$ oder allgemein $ax + b(x-n) = h$
$4x + 7x - 35 = 64$ = = $ax + bx - bn = h$
$x = 9$ Tage = = $x = \frac{h+bn}{a+b}$ Tage geht

der erste und $9 - 5 = 4$ Tage der 2te Bote.

17te Aufgabe. Zwei Körper bewegen sich in entgegengesetzter Richtung. Der erste fing $8 = n$ Secunden früher an, sich zu bewegen und macht in $5 = d$ Secunden $16 = e$ Fuß; der zweite aber durchläuft in $7 = f$ Secunden einen Raum von $24 = g$ Fuß. Wenn selbige nun eine Strecke von 288 $= h$ Fuß Länge zu durchlaufen haben; in welcher Secunde nach dem Ablaufe des ersten Körpers, werden sich dieselben begegnen?

Aufl. Zeigt x die Zahl der Secunden, so legt der erste $\frac{16x}{5} = \frac{ex}{d}$ Fuß zurück; da der zweite nur $x - 8$ oder $x - n$ Secunden zu laufen hat, so legt er $(x-8)\frac{24}{7} = \frac{24x-192}{7}$ oder $\frac{gx-ng}{f}$ Secunden zurück; folglich

$\frac{16x}{5} + \frac{24x-192}{7} = 288$ oder allgemein $\frac{ex}{d} + \frac{gx-ng}{f} = h$

$x = 47\frac{17}{29}$ Secunde oder $x = \frac{d(fh+ng)}{ef+dg}$

18te Aufgabe. Einem Boten, der vor $8 = n$ Tagen abgegangen war, wurde aus einem $12 = c$ Meilen weiter zurückgelegenen Orte ein andrer Bote mit dem Bedeuten nachgesendet: den ersteren Boten den 15ten Tag einzuholen. Wenn nun der erste Bote täglich $6 = a$ Meilen macht, wieviel Meilen wird der zweite täglich machen müssen?

Aufl. Die in dieser Aufgabe enthaltenen Bedingungen sind dieselben, die in der 12ten Aufgabe gegeben sind; man darf daher nur in dem dort entwickelten allgemeinen Ausdruck $x = \frac{an+c}{b-a}$, $x = 15$ und b für die unbekannte Größe setzen, so erhält man $15 = \frac{an+c}{b-a}$ und durch Reduction $b = a + \frac{an+c}{15}$ und an die Stelle der Buchstaben ihre Werthe gesetzt, gibt $b = 6 + \frac{6\times 8+12}{15} = 10$ Meilen.

Eben so kann man in den Aufgaben 13, 14, 15, 16 u. 17, wenn x als bekannt angenommen wird, jede andere von den in diesen Aufgaben vorkommenden Größen als die Unbekannte annehmen und ihren Werth mittelst Reduction der dort entwickelten allgemeinen Formeln bestimmen.

19te Aufgabe. Jemand wurde von einigen Armen um ein Almosen angesprochen. Er wollte einem jeden derselben gleichviel geben, fand aber, daß, wenn er jedem 3 gr. gäbe, ihm im Ganzen 7 gr. fehlten; gäbe er aber jedem nur 2 gr., so blieben ihm 10 gr. übrig. Wieviel Arme waren es? und wieviel Geld hatte er bei sich?

Antw. $2x + 10 = 3x - 7$

$x = 17 =$ der Zahl der Armen, und

$17 \times 2 + 10 = 44$ gr. hatte er bei sich.

20ste Aufgabe. Ein Forstbedienter antwortete auf die Frage, wie groß sein Revier und mit was es bestanden sey. — Das 1800 Acker große Revier wird nur auf Nadel- und Eichenniederwald bewirthschaftet; multiplicirt man die Acker Niederwald mit 5 und die Acker Nadelwald mit 3, so erhält man in der Summe beider Producte gerade 1100 Acker mehr, als die dreifache Größe des Reviers an Ackern ausmacht. Wieviel Acker Niederwald und wieviel Acker Nadelwald waren vorhanden?

Antw. $5(1800 - x) + 3x = 3 \times 1800 + 1100.$

$x = 1250$ Acker Nadel- und 550 Acker Niederwald.

21ste Aufgabe. Auf einem bedeutenden Forste fanden sich vor 50 Jahren nur 5 mal soviel Acker mit Fichten- als mit Buchen bestanden. In jedem dieser 50 Jahre aber wurden 2 Acker Fichten- und 2 Acker Buchenbestand abgetrieben, welche aber stets alle 4 mit Fichtensaamen wieder besäet worden; dadurch wurde das Verhältniß beider Bestände so ungleich, daß jetzt 20 mal soviel Acker mit Fichten, als mit Buchen bestanden sind. Wieviel Acker enthält dieser Forst? und wieviel sind davon jetzt mit Fichten, wieviel aber mit Buchen bestanden?

Aufl. Die vor 50 Jahren mit Buchen bestandene Ackerzahl $= x$ gesetzt, gibt, da während dieser Zeit $50 \times 2 = 100$ Acker abgetrieben und mit Fichtensaamen besäet worden sind, die jetzige Zahl Acker $= x - 100$. Die vor 50 Jahren mit Fichten bestandene Ackerzahl $= 5x$, und die jetzige $= 20 \times (x - 100) = 20x - 2000$. Nun aber ist $20x - 2000 + (x - 100) = 5x + x$, und $x = 140$ Acker Buchen und $140 \times 5 = 700$ Acker Fichten, waren vor 50 Jahren; jetzt aber sind 40 Acker Buchen und 800 Acker Fichten; das ganze Revier aber hat 840 Acker Fläche.

22ste Aufgabe. Ein Forstbedienter wurde, als er mit einem Freunde durch ein paar schöne Buchenbestände ging, um das Alter derselben gefragt; er antwortete: vor 10 Jahren, als ich dies Revier erhielt, war der ältere dieser Bestände genau so alt, als ich damals, und der jüngere viermal jünger als jener; jetzt aber ist das Alter des jüngeren Bestandes halb so groß, als das des älteren, die Summe der Jahre unserer jetzigen 3 Alter aber ist 12mal größer als das Alter des jüngeren Bestandes vor 10 Jahren. Wie alt war der Forstbediente, und wie alt jeder Bestand, sowohl jetzt als vor 10 Jahren?

Antw. $x + 10 + 4x + 10 + 4x + 10 = 12x$, und $x = 10$ Jahr $=$ dem Alter des jüngeren Bestandes, also 40 Jahr $=$ dem Alter des Forstbedienten und des älteren Bestandes vor 10 Jahren; daher ist das jetzige Alter des jüngeren Bestandes 20 Jahr, das des älteren 50 Jahr und des Forstbedienten 50 Jahr.

23ste Aufgabe. Drei, an Alter verschiedene Buchenbestände umfassen zusammen ein Alter von 200 Jahren. Vor 10 Jahren war der älteste dieser Bestände noch einmal so alt, als der zweite, und der letztre 3mal älter, als der jüngste. Wie alt ist jetzt jeder dieser 3 Bestände?

Antw. Das jetzige Alter des jüngsten Bestandes 27 Jahr,
= = = = zweiten = 61 —
= = = = ältesten = 112 ---

24ste Aufgabe. Ein Holzhändler kauft Holz in einem Gehau, die Klftr. für $3\frac{1}{4}$ Thlr. und findet beim Nachzählen, daß man ihm 10 Klaftern mehr gegeben hatte, als er erhalten sollte; zugleich nöthigt ihm aber auch die schlechte Beschaffenheit dieses Holzes, die Klftr. für 3 Thlr. 4 gr. wieder zu verkaufen; dadurch erleidet er aber, trotz der mehr erhaltenen 10 Klftrn., einen baaren Verlust von 5 pro Cent an dem, zum Einkauf verwendeten Kapital; wieviel Klftrn. hatte der Holzhändler bekommen? Antw. 210 Klaftern.

25ste Aufgabe. Von einem Gehau, auf welchem eine gewisse Anzahl Schocke Reißholz standen, wurden 5 davon gestohlen. Da das Schock mit 16 gr. bezahlt wurde, erlitt der Besitzer hierdurch einen Schaden von 3 Thlr. 8 gr. Um diesem Schaden wieder beizukommen, beschloß er, von dem übrigen Reißholz allemal 4 ßo. für 3 Thaler zu verkaufen und erhielt hierdurch gerade soviel Geld, als er erhalten hätte, wenn bei obigem Verkaufspreise kein Reißholz gestohlen worden wäre; wieviel ßo. waren anfänglich vorhanden? Antw. 45 Schock.

26ste Aufgabe. Eine Gratification von 360 Thlr. soll unter 4 Forstbediente nach Verhältniß der, von ihnen cultivirten Blößen vertheilt werden; nun verhält sich die Zahl Acker, die A cultivirt hat, zu der des B, wie 2 : 3, und zu der des C wie 3 : 4; D aber hat gerade halb soviel cultivirt, als A und B zusammen genommen; wieviel Thlr. erhält jeder Forstbediente?

Antw. A erhält $70\frac{5}{61}$ Thlr., B $106\frac{14}{61}$ Thlr., C $94\frac{26}{61}$ Thlr. und D $88\frac{3}{61}$ Thlr.

27ste Aufgabe. Benutze ich meine ausgeliehenen Kapitalien zu 4 pro Cent, sprach ein reicher Mann, so fehlen mir zu meinen Bedürfnissen gerade zweimal soviel Thaler, als das Jahr Tage hat; benutze ich selbige aber zu 5 pro Cent, so blei-

ben mir, gerade 337 Thlr. 12 gr. übrig. Wie groß war das ausgeliehene Kapital, und wie groß waren die Bedürfnisse dieses Mannes?

Aufl. Wenn das Kapital $=$ x Thlr. so, erhielt er im ersteren Falle $\frac{4x}{100}$ Thlr., im letzteren aber $\frac{5x}{100}$ Interessen; nun aber ist: $\frac{4x}{100} + 730 = \frac{5x}{100} - 337\frac{1}{2}$ u. $x = 106750$ Thlr. da dieses Kapital, zu 4 p. C. ausgeliehen, 4270 Thlr. Interessen bringt, so sind seine Bedürfnisse $= 4270 + 730 = 5000$ Thlr.

28ste Aufgabe. Bei 25jährigem Umtrieb bewirthschaftet, lieferte der Acker eines mit Niederwald bestandenen Reviers im Durchschnitt 60 ßo. Reißholz. Da aber die augenblicklichen Bedürfnisse der Umgegend jährlich 45 ßo. mehr betragen, als man zeither erhielt, so ist man gesonnen, dieses Revier eine Zeit lang bei 20jährigem Umtriebe zu bewirthschaften, wodurch vor der Hand die Bedürfnisse befriedigt werden können. Wie groß war dieses Revier, und wieviel gab der Acker bei 20jährigem Umtriebe?

Aufl. Das Revier enthalte x Ack., so können bei 25jährigem Umtriebe jährlich $\frac{x}{25}$ und bei 20jährigem $\frac{x}{20}$ Acker abgetrieben werden. Erstere gaben $60 \times \frac{x}{25}$, letzterer aber geben 45 ßo. mehr, also ist $\frac{60x}{25} + 45 = \frac{60x}{20}$, woraus $x = 150$ Acker. Im ersteren Falle wurden abgetrieben $\frac{150}{25} = 6$ Acker, diese gaben $60 \times 6 = 360$ ßo. Reißholz. Im letzteren Falle wurden abgetrieben $\frac{150}{20} = 7\frac{1}{2}$ Acker, diese geben $360 + 45 = 405$ ßo. Reißholz, also gab der Acker $\frac{405}{7\frac{1}{2}} = 54$ ßo. Reißholz.

Drittes Kapitel.

Gleichungen und algebraische Aufgaben vom ersten Grade, mit 2 und mehreren unbekannten Größen.

§. 63.

Daß bei algebraischen Aufgaben mit mehreren unbekannten Größen aus den Bedingungen der Aufgabe eben soviel Gleichungen müssen gebildet werden können, als unbekannte Größen vorhanden sind, wurde bereits in §. 60 erwähnt; hier bemerke ich nur noch: daß in jeder dieser Gleichungen die unbekannten Größen zu den bekannten in einer eigenen Beziehung stehen müssen; daß nämlich nicht aus gleichen Bedingungen zwei verschieden ausgedrückte Gleichungen, die endlich einerlei Resultat geben würden, gebildet werden dürfen. Folgten z. B. aus den Bedingungen einer Aufgabe die beiden Gleichungen:

$$1)\ \frac{x+y}{x-y} = 1\tfrac{2}{3} \quad \text{und} \quad 2)\ \frac{10x-3y}{2x-y} = \tfrac{3}{7}\tfrac{7}{},$$

so scheinen dies zwar zwei verschiedene Gleichungen, man erhält aber durch Reduction: 1) $8y - 2x = 0$ und 2) $16y - 4x = 0$, oder bei beiden $2y - x = 0$; die Aufgabe gehörte demnach zu den unbestimmten.

Bei Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen müssen letztere alle, bis auf eine einzige, deren Werth man bestimmen will, aus der Gleichung weggeschafft — eliminirt — werden.

I. Methode. (Regeln.)

1) Man reducire zwei von den gegebenen, oder aus den Bedingungen der Aufgabe gebildeten Gleichungen dergestalt nach §. 40, daß bei jeder ein und dieselbe unbekannte Größe, mit dem positiven Zeichen und dem Coefficienten und Exponenten 1, auf einer Seite, alle andre bekannte und unbekannte Größen aber auf

der andern Seite des Gleichheitszeichens zu stehen kommen; d. h. man drücke den Werth einer unbekannten Größe, die in 2 Gleichungen vorkommt, mittelst Reduction dieser Gleichungen, auf 2 verschiedene Arten aus. Wären z. B. die 3 Gleichungen gegeben: 1) $4x - y + 2z = 16 + 2x$, 2) $x + y + z = 8 + 2z - 2y$, 3) $\frac{x}{3} + z = 2y$; so wäre bei der ersteren $x = 8 + \frac{1}{2}y - z$ und bei der zweiten $x = 8 + z - 3y$.

2) Da die also erhaltenen Ausdrücke sich gleich sind, weil beide den Werth von x angeben, so erhält man mittelst derselben eine neue Gleichung; hier nämlich: $8 + \frac{1}{2}y - z = 8 + z - 3y$, und durch Reduction derselben, $z = \frac{7y}{4}$, in welcher kein x mehr vorkommt. Wären nur zwei unbekannte Größen zu bestimmen gewesen, (so daß y eine bekannte Größe, z. B. $= 4$ wäre), so erhielte man mittelst dieser Gleichung den Werth der zweiten unbekannten Größe, nach §. 40, und diesen dürfte man nur an die Stelle dieser unbekannten Größe in eine der unter 1 gegebenen Gleichungen setzen, um auch den Werth für die erste unbekannte Größe zu bekommen. Bei unserm Beispiel wäre, wenn $y = 4$ angenommen wird, $z = \frac{7 \times 4}{4} = 7$, und dessen Werth nebst dem für y angenommenen in die reducirte zweite Gleichung gesetzt, gäbe $x = 8 + 7 - 12 = 3$.

3) Bei 3 Gleichungen setze man, wenn auch in der 3ten die ausgeschiedene Größe x vorhanden ist, an die Stelle dieses x einen der, nach 1, für dasselbe gefundenen Werthe. Man erhält, wenn bei unserm Beispiel der 2te der oben für x gefundenen Werthe in die 3te Gleichung anstatt x gesetzt wird: $\frac{8+z-3y}{3} + z = 2y$, und diese Gleichung reducirt, gibt $z = \frac{9y}{4} - 2$.

4) Auf diese Art erhält man abermals 2 gleiche Ausdrücke für die unbekannte Größe z; (bei 2 war nämlich $z = \frac{7y}{4}$); diese in Form einer Gleichung angesetzt, geben solche bei unserm Beispiel: $\frac{7y}{4} = \frac{9y}{4} - 2$, woraus durch Reduction $y = 4$ erhalten wird.

5) Den für die letzte unbekannte Größe gefundenen Werth (wie bei 2) in eine der für z gefundenen Gleichungen gesetzt, gäbe den Werth der 2ten unbekannten Größe; in unserm Beispiele war nämlich $z = \frac{9y}{4} - 2$, und da $y = 4$, so ist $z = 9 - 2 = 7$. Setzt man endlich die für die 2 unbekannten Größen gefundenen Werthe in einem der unter 1 für x gefundenen Ausdrücke, so erhält man auch den Werth der 3ten unbekannten Größe. Da in unserm Beispiele $x = 8 + z - 3y$, so ist $x = 8 + 7 - 12 = 3$.

6) Wären 4 Gleichungen gegeben, in welchen 4 unbekannte Größen vorkämen, so würden die Werthe von z und x in die 4te Gleichung gesetzt werden müssen, ehe man eine Gleichung erhielte, in welcher nur eine unbekannte Größe vorkommt. Ueberhaupt hat man zu reduciren:

a)	3	Gleichungen	bei	2	unbekannten	Größen.
b)	5	=	=	3	=	=
c)	7	=	=	4	=	=
d)	$2n-1$	=	=	n	=	=

II. Methode. (Regeln.)

1) Man reducire die gegebenen Gleichungen so, daß die unbekannten Größen mit ihren Coefficienten auf die eine Seite, alle bekannte Größen aber auf die andre Seite des Gleichheitszeichens zu stehen kommen. Die eben gelösten 3 Gleichungen also behandelt, ständen: 1) $2x - y + 2z = 16$, 2) $x + 3y - z = 8$, 3) $x + 3z - 6y = 0$.

2) Man sehe ferner, ob eine der unbekannten Größen in 2 Gleichungen einen gleichen Coefficienten hat, und addire hierauf

diese 2 Gleichungen, wenn die 2 gleichen Coefficienten verschiedene Zeichen haben, subtrahire dagegen eine Gleichung von der andern, wenn die Zeichen gleich sind. Hier tritt, rücksichtlich der unbekannten Größe x, bei den Gleichungen 2 und 3 der letztere Fall ein; die 3te Gleichung also von der 2ten abgezogen, gibt in $9y - 4z = 8$ (A), eine Gleichung, in welcher kein x mehr vorkommt.

3) Finden sich nicht 2 gleiche Coefficienten ein und derselben unbekanten Größe, so suche man dadurch, daß man die Gleichung mit einer beliebigen Zahl multiplicirt oder dividirt, die Coefficienten gleich zu machen, und verfahre sodann nach 2. Die zweite der gegebenen Gleichungen mit 2 multiplicirt und von der ersten abgezogen, gibt in $4z - 7y = 0$ (B), abermals eine Gleichung, in welcher kein x mehr erscheint.

4) Verfährt man mit den Gleichungen unter A und B wiederum nach Regel 2 und 3 (addirt nämlich dieselben hier, weil z in der einen den Coefficienten $+4$, in der andern -4 hat), so erhält man zur Endgleichung: $2y = 8$, woraus $y = 4$; diesen Werth für y in die Gleichung A oder B gesetzt, gibt $36 - 4z = 8$ und $z = 7$; beide gefundene Werthe endlich in eine der gegebenen Gleichungen, z. B. in die zweite, für y und z gesetzt, gibt: $x + 3.4 - 7 = 8$, woraus $x = 3$ folgt.

§. 64.

Bezout hat mittelst eines, der 2ten Methode annalogen Verfahrens und Anwendung der Combinationslehre, allgemeine Formeln für Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen entwickelt, nach welchen man die Werthe aller unbekannnten Größen sogleich erhält, wenn man die Coefficienten dieser Größen, an die Stelle der Buchstaben in die Formel setzt und die dort angedeuteten Rechnungen ausführt. Diese Coefficienten sind:

in der 1sten Gleichung mit a, b, c, d, e . . . .
" " 2ten " " " a', b', c', d', e' . . .
" " 3ten " " " a'', b'', c'', d'', e'' . . u. f. f.

bezeichnet, und zwar so, daß das a den Coefficienten der ersten, das b den der 2ten, das c den der dritten u. s. w. unbekannten Größe, der letzte in der Formel vorkommende Buchstabe aber die bekannten Größen der Gleichung bezeichnet. Sie können positiv oder negativ, ganz oder gebrochen, rational oder irrational, und selbst in dem Fall $= 0$ seyn, wenn eine oder einige unbekannte Größen in einer oder einigen Gleichungen nicht vorkommen sollten.

Diese Formeln sind:

1) für die Gleichungen mit zwei unbekannten Größen:

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \text{ und } y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

2) für die Gleichungen mit drei unbekannten Größen:

$$x = \frac{db'c'' - dc'b'' + cd'b'' - bd'c'' + bc'd'' - cb'd''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}$$

$$y = \frac{ad'c'' - ac'd'' + ca'd'' - da'c'' + dc'a'' - cd'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}$$

$$z = \frac{ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}$$

Damit der Anfänger auch mit Anwendung dieser Formeln vertraut werde, sollen die Werthe der unbekannten Größen aus folgenden 3 Gleichungen mittelst derselben bestimmt werden.

1) $4x - 2y - z = 2y + 3z - 12$
2) $3x - y = 10 - x$
3) $z - \frac{x}{b} = 2y - \frac{1}{2}$

Diese Gleichungen auf die vorgeschriebene Form gebracht, sind:

1) $x - y - z = -3$
2) $4x - y = 10$
3) $x + 12y - 6z = 3$

Die Buchstaben der Formel haben also hier folgende Werthe:

$a = 1, \quad b = -1, \quad c = -1, \quad d = -3$
$a' = 4, \quad b' = -1, \quad c' = 0, \quad d' = 10$
$a'' = 1, \quad b'' = 12, \quad c'' = -6, \quad d'' = 3$

Diese Werthe an die Stelle der Buchstaben gesetzt, gibt:

$$x = \frac{(-3.-1.-6)-(-3.0.12)+(-1.10.12)-(-1.10.-6)+(-1.0.3)}{(1.-1.-6)-(1.0.12)+(-1.4.12)-(-1.4.-6)+(-1.0.1)}$$

$$\frac{-(-1.-1.3)}{-(-1.-1.1)} = \frac{-18-0-120-60+10-3}{6-0-48-24-0--1} = \frac{-201}{-67} = +3$$

$$y = \frac{(1.10.-6)-(1.0.3)+(-1.4.3)-(-3.4.-6)+(-3.0.1)-(-1.10.1)}{-67}$$

$$= \frac{-60-0-12-72+0+10}{-67} = \frac{-134}{-67} = +2$$

$$z = \frac{(1.--1.3)-(1.10.12)+(-3.4.12)-(-1.4.3)+(-1.10.1)-(-3.-1.1)}{-67}$$

$$= \frac{-3-120-144+12-10-3}{-67} = \frac{-268}{-67} = +4$$

§. 65.

Erscheint die unbekannte Größe als Nenner in einer oder mehreren der gegebenen Gleichungen, so erfordert die Elimination derselben oft verschiedene Hülfsmittel, um nicht auf Gleichungen von höheren Graden zu kommen. Können die gegebenen Gleichungen nicht auf die, zu Anfange des vorigen §s. angezeigte Form gebracht werden, so können begreiflich auch die dort gegebenen Formeln nicht angewendet werden. Die Anwendung der ersten Methode, in Verbindung mit der zweiten, führt jedoch bei solchen Gleichungen stets und am schnellsten zum Ziele, wenn nicht etwa unter den gegebenen Gleichungen solche sind, bei welchen die Elimination unumgänglich auf eine Endgleichung von einem höhern Grade, als den ersten, führen muß. — Von den folgenden 24 Aufgaben sind die Reductionen da, wo das Eliminiren mit besonderen Schwierigkeiten verknüpft war, umständlich ausgeführt; bei den mehresten sind jedoch nur die Werthe der unbekannten Größen angegeben worden.

1) $\begin{cases} 4x - y = 2y + x - 3 \\ x + y = 5x - 2y + 1 \end{cases}$

Reduction.

$$(1) \quad 3x - 3y = -3$$
$$(2) \quad -4x + 3y = 1$$

$$-x = -2 \text{ (durch Addition)}$$
$$x = 2 \text{ und}$$

$$2x - 3y = -3$$
$$-3y = -9 \text{ und } y = 3$$

2) $\begin{cases} \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = c \\ \frac{d}{x} + \frac{e}{y} = g \end{cases}$

Reduction.

(1) $\frac{ad}{x} + \frac{bd}{y} = cd$ (durch Multiplication mit d)

(2) $\frac{ad}{x} + \frac{ae}{y} = ag$ (durch Multiplication mit a)

$- \quad - \quad -$

$\frac{bd - ae}{y} = cd - ag$ (durch Subtraction)

$y = \frac{bd - ae}{cd - ag}$ und $x = \frac{ae - bd}{ce - bg}$

3) $\begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{6}{y} = 5 \\ \frac{7}{x} + \frac{9}{y} = 18\frac{1}{2} \end{cases}$

$x = \frac{1}{2}$ und $y = 2$

4) $\begin{cases} \frac{5}{x} - y = 5y + 2 \\ \frac{8}{x} - 9y = 3\frac{2}{5} \end{cases}$

$x = 1\frac{1}{4}$ und $y = \frac{1}{5}$

5) $\begin{cases} \frac{3}{x} + 4y = \frac{4}{x} + \frac{8y}{3} + 2\frac{1}{2} \\ \frac{2}{x} + 6\frac{2}{3} = 3y + \frac{6}{x} \end{cases}$

Reduction.

(1) $-\frac{1}{x} + 4y - \frac{8y}{3} = 2\frac{1}{2}$

$-\frac{3}{x} + 4y = 7\frac{1}{2}$

(2) $-\frac{4}{x} - 3y = -6\frac{3}{4}$ und

$-\frac{16}{x} - 12y = -26\frac{3}{2}$ (durch × mit 4)

(1) $-\frac{9}{x} + 12y = 22\frac{1}{2}$ (durch × mit 3)

$-\frac{25}{x} = -4\frac{1}{6}$ (durch Addition)

$x = 6$, also $y = 2$

6) $\begin{cases} \frac{a}{b+x} = \frac{b}{3a+y} \\ 2bx = d - ay \end{cases}$

Reduction.

(1) $bx - ay = 3a^2 - b^2$

(2) $2bx + ay = d$

$3bx = 3a^2 - b^2 + d$ (durch Addition)

$$x = \frac{3a^2 - b^2 + d}{3b}$$

Es ist aber auch

(1) $2bx - 2ay = 6a^2 - 2b^2$ (durch × mit 2)

(2) $2bx + ay = d$

$-3ay = 6a^2 - 2b^2 - d$ (durch Subtraction)

$$y = \frac{2b^2 - 6a^2 + d}{3a}$$

7) $\begin{cases} \frac{7x}{2} + 3y = +4y\frac{4x}{5} + 6 \\ 4\frac{1}{2}x - y = 3x \end{cases}$

$x = 5$ und $y = 7\frac{1}{2}$

8) $\begin{cases} \frac{4x}{3} + \frac{y}{3} = x + y - 1{,}61 \\ 2x + \frac{4y}{3} = y + 0{,}87 \end{cases}$

$x = 0{,}03$ und $y = 2{,}43$

9) $\begin{cases} 4x - 2y = 2x - \frac{1}{4}y - 10 \\ x + y = \frac{1}{4}x + 2{,}125 \end{cases}$

$x = -2\frac{1}{2}$ und $y = 4$

10) $\begin{cases} (a+x)(b+y) = c + (d+x)(g+y) \\ ax + by = h \end{cases}$

Reduction.

(1) $ab + bx + ay + xy = c + gd + gx + dy + xy$

$(b-g)\,x + (a-d)\,y = c + gd - ab$ und

$ax(b-g) + ay(a-d) = ac + agd - a^2b$ (durch $\times$ mit a)

(2) $ax(b-g) + by(b-g) = h(b-g)$ durch $\times$ mit $b-g$)

$ay(a-d) - by(b-g) = ac + agd - a^2b - h(b-g)$ (d. Subtr.)

$$y = \frac{a(c+gd-ab) - h(b-g)}{a(a-d) - b(b-g)}$$ und

$$x = \frac{bc + bgd - ab^2 - h(a-d)}{b(b-g) - a(a-d)}$$

11) $\begin{cases} 1)\ ax + by + cz = d \\ 2)\ gx + hy = f \\ 3)\ hx - kz = m \end{cases}$

Reduction.

1) $akx + bky + ckz = dk$ (durch $\times$ mit k)

3) $chx - ckz = cm$ (durch $\times$ mit c)

(a) $(ak + ch)x + bky = dk + cm$ (durch Addition)

2) $bkgx + bkhy = bkf$ (durch $\times$ mit bk)

(a) $(ak + ch)hx + bkhy = (dk + cm)h$ (durch $\times$ mit h)

$(bkg - akh - ch^2)x = bkf - dkh - cmh$

$$x = \frac{bkf - dkh - cmh}{bkg - akh - ch^2} = \frac{k(bf - dh) - cmh}{k(bg - ah) - ch^2}$$

$$y = \frac{f}{h} - \frac{g(bkf - dhk - cmk)}{h(bkg - akh - ch^2}$$

$$z = \frac{m}{k} - \frac{hk(fb - dh) - cmh^2}{k(bkg - akh - ch^2)}$$

12) $\begin{cases} 1)\ 4x + 2y + 3z = 45 \\ 2)\ x + 3y + z = 18 \\ 3)\ 5x + 4y + 4z = 61 \end{cases}$

$x = 5,\ y = 2,\ z = 7$

13) $\begin{cases} 1)\ 4x - 3y = 2z - 5 \\ 2)\ 3x + z = 10 - y \\ 3)\ x + 2y + z = 5x + 1 \end{cases}$

$x = 2,\ y = 5$ und $z = -1$

14) $\begin{cases} 1)\ 4x - z = y + 2{,}2 \\ 2)\ 3y + z = 7 \\ 3)\ 5x - y = z + 2{,}5 \end{cases}$

$x = 0{,}3,\ y = 4,\ z = -5$

15) $\begin{cases} 1)\ 46 - 3\frac{1}{2}x + 2y = z - 7\frac{1}{2} \\ 2)\ x + y - z = 2{,}5y + 10 \\ 3)\ y + z = x - 8 \end{cases}$

$x = 11,\ y = -4,\ z = 7$

16) $\begin{cases} 1)\ ax + by = c \\ 2)\ bx - cy = d \\ 3)\ dy + gz = h \end{cases}$

$$x = \frac{c^2 + bd}{ac + b^2},\quad y = \frac{b(c^2 + bd)}{c(ac + b^2)} - \frac{d}{c} = \frac{(bc - ad)}{ac + b^2}$$

$$z = \frac{h}{g} - \frac{d(bc - ad)}{g(ac + b^2)} = \frac{h(ac + b^2) - d(bc - ad)}{g(ac + b^2)}$$

17) $\begin{cases} 1)\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a \\ 2)\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = b \\ 3)\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = c \end{cases}$

Reduction.

1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a$

3) $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=c$

$= \quad - \quad -$

(a) $\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=a-c$ (durch Subtraction)

2) $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=b$

$\frac{2}{y}=a+b-c$ (durch Addition)

$y=\frac{2}{a+b-c}$

(a) $\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=a-c$

2) $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=b$

$= \quad - \quad -$

$-\frac{2}{z}=a-b-c$ (durch Subtraction)

$z=\frac{2}{b+c-a}$

1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{2}{a+b-c}}=a$

$\frac{1}{x}+\frac{a+b-c}{2}=a$

$x=\frac{2}{a-b+c}$

18) $\begin{cases} 1) \ \frac{6}{x}+\frac{4}{y}-\frac{14}{z}=\frac{11}{18} \\ 2) \ \frac{2}{x}+\frac{9}{y}-\frac{6}{z}=\frac{8}{3} \\ 3) \ \frac{1}{x}-\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=0{,}25 \end{cases}$

$x=4, \quad y=6, \quad z=9$

19) $\begin{cases} 1)\ \frac{4}{x} - \frac{4}{z} = \frac{3}{y} \\ 2)\ \frac{4}{x} + \frac{6}{y} = 1 \\ 3)\ \frac{3}{z} + \frac{12}{y} = \frac{8}{x} \end{cases}$

$x = 8,\quad y = 12,\quad z = 16$

20) $\begin{cases} 1)\ \frac{4x+3y+z}{x+z} = 5{,}2 \\ 2)\ \frac{4y+4z}{2(x+y)} = \frac{8}{7} \\ 3)\ \frac{6x}{3(x+y+z)} = 1 \end{cases}$

Reduction:

1) $-1{,}2x + 3y - 4{,}2z = 0$

2) $-\frac{16x}{7} + \frac{12y}{7} + 4z = 0$

3) $3x - 3y - 3z = 0$

1) $-1{,}2x + 3y - 4{,}2z = 0$

(a) $1{,}8x - 7{,}2z = 0$ (durch Addition)

3) $12x - 12y - 12z = 0$ (durch × mit 4)

2) $-16x + 12y + 28z = 0$ (durch × mit 7)

(b) $-4x + 16z = 0$ (durch Addition)

(b) $-x + 4z = 0$ (durch Division mit 4)

(a) $x - 4z = 0$ (durch Division mit 1,8)

$0 = 0$ (durch Addition).

Wollte man aber folgendermaßen reduciren:

1) $-2{,}4x + 6y - 8{,}4z = 0$ (durch × mit 2)

2) $-4{,}8x + 3{,}6y + 8{,}4z = 0$ (durch × mit 2,1)

(c) $-7{,}2x + 9{,}6y = 0$ (durch Addition)

2) $-\frac{48x}{7} + \frac{36y}{7} + 12z = 0$ (durch × mit 3)

3) $12x - 12y - 12z = 0$ (durch × mit 4)

(d) $\frac{36x}{7} - \frac{48y}{7} = 0$

$$(d) \quad 3x - 4y = 0 \text{ (durch Division mit } \tfrac{1}{7}\text{)}$$
$$(c) \quad -3x + 4y = 0 \text{ (durch Division mit 2,4)}$$
$$0 = 0 \text{ (durch Addition)}$$

Diese Aufgabe gehört also zu den unbestimmten (s. §. 60), und es geht aus der gemachten Reduction nur soviel hervor: daß $x = 4z$ (Gleichung a und b) und $4y = 3x$ (Gleichung c und d). Wird nun für x eine beliebige Zahl n gesetzt, so wird, wenn $x = n$, $y = \frac{3n}{4}$ und $z = 4n$ seyn; ist z. B. $n = 2$, so ist $y = \frac{3 \cdot 2}{4} = 1\frac{1}{2}$ und $z = 8$; ist $n = 5$, so ist $y = \frac{3 \cdot 5}{4} = 3\frac{3}{4}$ und $z = 20$ u. s. w.

$$21) \begin{cases} 1) \; w + x + y + z = a \\ 2) \; 8w + 4x + 2y + z = b \\ 3) \; 27w + 9x + 3y + z = c \\ 4) \; 64w + 16x + 4y + z = d \end{cases}$$

Reduction.

$$2) \; 8w + 4x + 2y + z = b$$
$$1) \; w + x + y + z = a$$
$$(a) \; 7w + 3x + y = b - a \text{ (durch Subtraction)}$$

$$3) \; 27w + 9x + 3y + z = c$$
$$2) \; 8w + 4x + 2y + z = b$$
$$(b) \; 19w + 5x + y = c - b \text{ (durch Subtraction)}$$

$$4) \; 64w + 16x + 4y + z = d$$
$$3) \; 27w + 9x + 3y + z = c$$
$$(c) \; 37w + 7x + y = d - c \text{ (durch Subtraction)}$$

$$(b) \; 19w + 5x + y = c - b$$
$$(d) \; 18w + 2x = d + b - 2c \text{ (durch Subtraction)}$$

(b) $19w + 5x + y = c - b$
(a) $7w + 3x + y = b - a$
$- \quad - \quad - \quad - \quad +$

(e) $12w + 2x = a - 2b + c$ (durch Subtraction)
$- \quad - \quad - \quad + \quad -$

(d) $18w + 2x = d + b - 2c$

$6w = -a + 3b - 3c + d$ (durch Subtraction der Gleichung e von der d)

$$w = \frac{d - 3c + 3b - a}{6}$$

$$x = \frac{3a - 8b + 7c - 2d}{2}$$

$$y = \frac{11d - 42c + 57b - 26a}{6}$$

$$z = 4a - 6b + 4c - d$$

22)
$$\begin{cases} 1)\ \frac{3}{w} + \frac{2}{x} - \frac{1}{y} + z = 1{,}5 \\ 2)\ \frac{6}{w} - \frac{1}{x} + \frac{2}{y} - z = 0{,}75 \\ 3)\ \frac{4}{w} + \frac{3}{x} + \frac{3}{y} + 2z = 5\frac{2}{12} \\ 4)\ \frac{5}{w} - \frac{2}{x} + \frac{4}{y} + 3z = 5\frac{1}{3} \end{cases}$$

$w = 6,\ x = 4,\ y = 2$ und $z = 1$

23)
$$\begin{cases} 1)\ 4w + x + y + 3z = 13 \\ 2)\ 2w - x - y + 6z = 6 \\ 3)\ 7w + 4x - 3y = 6z - 14 \\ 4)\ 5x + 3z = 9y - 3 \end{cases}$$

$w = -4,\ x = 12,\ y = 8$ und $z = 3$

24)
$$\begin{cases} 1)\ v + w + x + y + z = a \\ 2)\ 16v + 8w + 4x + 2y + z = b \\ 3)\ 81v + 27w + 9x + 3y + z = c \\ 4)\ 256v + 64w + 16x + 4y + z = d \\ 5)\ 625v + 125w + 25x + 5y + z = e \end{cases}$$

$$w = \frac{5f + 22d - 36c + 26b - 7a}{12}$$

$$x = \frac{71a - 236b + 294c - 164d + 35f}{24}$$

$$y = \frac{214b - 77a - 234c + 122d - 25f}{12}$$

$$z = 5a - 10b + 10c - 5d + f$$

§. 66.

Algebraische Aufgaben vom ersten Grade mit zwei- und mehreren unbekannten Größen.

1ste Aufgabe. Zwei Zahlen zu finden, deren Summe $= 48 = a$ und deren Differenz $= 8 = b$ ist; diese Zahlen sind?

Aufl. Wird die größere Zahl mit x, die kleinere Zahl mit y bezeichnet, so ist

1) $x + y = 48$ oder $x + y = a$

2) $x - y = 8$ = $x - y = b$ und

durch Addition erhält man: $2x = 56$ = $2x = a + b$ und

$x = 28$ = $x = \frac{a+b}{2}$, folglich

$y = 28 - 8 = 20$ = $y = \frac{a-b}{2}$

2te Aufgabe. Auf einem Gehaue stehen zusammen 400 Scheitklaftern und Schocke Reißigholz; von der Klafterzahl 45 weggenommen und der Zahl der Reißigschocke zugelegt, gibt für beide eine gleich große Zahl; wieviel waren es Klaftern und wieviel Reißholzschocke?

Aufl. Bezeichnet x die Klafterzahl und y die Zahl der Reißholzschocke, so ist: 1) $x + y = 400$ und 2) $x - 45 = y + 45$; woraus $x = 245$ und $y = 155$.

3te Aufgabe. Eine Größe x wurde mit m, eine andere y mit n multiplicirt; dann aber, als jene mit p multiplicirt ward, wurde y mit r multiplicirt; die Summe der ersten zwei Producte war $= g$, die der letzteren $= h$; wie werden die Werthe der Größen x und y dargestellt?

Aufl. 1) $mx + ny = g$, 2) $px + ry = h$, also $x = \frac{gr - kn}{mr - pn}$; $y = \frac{hm - pg}{mr - pn}$

4te Aufgabe. Von zwei Buchenbeständen war der ältere vor 20 Jahren $2\frac{1}{2}$ mal so alt, als der jüngere; jetzt ist der erstere aber nur $1\frac{1}{2}$ mal so alt, als der letztere; wie alt war jeder Bestand?

Antw. Der jüngere 30, also der ältere 45 Jahr.

5te Aufgabe. Zwei gränzende Reviere haben zusammen 4800 Acker Fläche; da das eine dieser Reviere bedeutend kleiner, als das andere ist, so will man vom letzteren den dritten Theil der Fläche zu dem kleineren Reviere schlagen, und es findet sich, daß dadurch das letztere um 150 Acker größer wird, als der übrigbleibende Theil des größeren Reviers; wie groß war jedes dieser Reviere vor, und wie groß nach der Theilung?

Aufl. Das kleinere Revier soll vor der Theilung x, das größere y Acker enthalten haben, so wird ersteres nach der Theilung $x + \frac{1}{3}y$ und letzteres $y - \frac{1}{3}y$ Acker enthalten. Nun ist 1) $x + y = 4800$ und 2) $x + \frac{1}{3}y = y - \frac{1}{3}y + 150$, woraus $x = 1312\frac{1}{2}$ y Acker und $= 3487\frac{1}{2}$ Acker Größe der Reviere vor der Theilung; und $1312\frac{1}{2} + \frac{3487\frac{1}{2}}{3} = 2475$ Ack. hatte das Anfangs kleinere, u. $3487\frac{1}{2} - \frac{3487\frac{1}{2}}{3} = 2325$ Ack. hatte das Anfangs größere Reviere nach der Theilung.

6te Aufgabe. Man verkaufte 6 Klftr. hartes und 18 Klftr. weiches Holz für $51\frac{1}{2}$ Thlr.; ein andermal wurden 20 Klftr. hartes und 7 Klftr. weiches für 78 Thlr. 22 gr. verkauft; wie theuer war eine harte, und wie theuer eine weiche Klftr. gerechnet worden?

Antw. 3 Thlr. 8 gr. die harte, und 1 Thlr. 18 gr. die weiche Klftr.

7te Aufgabe. Ein Teich von 96000 $= a$ Cubikfuß Rauminhalt kann durch zwei Schleußen angefüllt werden. Als man die erste Schleuße 10 $= m$ Stunden, die letztere aber 14

$= n$ Stunden hatte laufen lassen, war der Teich gefüllt. Ein andermal ließ man die erste Schleuße $18 = p$ und die andere $12 = r$ Stunden laufen, ehe der Teich voll ward. Wieviel Cubikfuß Wasser schickt jede Schleuße in einer Stuude dem Teiche zu? und in wieviel Stunden wird der Teich voll werden, wenn beide Schleußen gleiche Zeit laufen?

Aufl. Die erste Schleuße soll dem Teiche in einer Stunde x, die andere y Cubikfuß zusenden, so ist

1) $10x + 14y = 96000$ oder allgemein $mx + ny = a$
2) $18x + 12y = 96000$ = = $px + ry = a$

Hieraus folgt: $x = 1454\frac{6}{11}$ = = $x = \frac{a(r-n)}{rm-np}$

$$y = 5818\frac{2}{11} \quad = \quad = \quad y = \frac{a(m-p)}{rm-np}$$

Die Anzahl Stunden aber, die zu Füllung des Teiches nöthig sind, wenn beide Schleußen zugleich und gleich lange Zeit laufen, ist

$$\frac{\frac{a}{a(r-n)+a(m-p)}}{rm-np} = \frac{rm-np}{rn+m-p} \text{ oder hier } \frac{96000}{3692\frac{4}{13}+4219\frac{71}{91}}$$

$= 12\frac{2}{15}$ Stunden $= 12$ Stunden 8 Minuten.

8te Aufgabe. Auf einer Revierabtheilung fanden sich 360000 Cubikfuß Nutz- Scheit- und Klöppelholz, und zwar betrug die Zahl der Cubikfuß des Nutz- und Klöppelholzes gerade die Hälfte der Cubikfuß Scheitholz; der Cbkfß. Scheit- und Klöppelholz aber waren gerade 17 mal mehr, als Cbkfß. Nutzholz; wieviel Cbkfß. waren es von jeder Sorte?

Antw. 20000 Cubikfuß Nutzholz, 10000 Cbkfß. Klöppelholz uud 240000 Cbkfß. Scheitholz.

9te Aufgabe. Zwölf Leipziger und 15 rheinländische Fuß machen zusammen $25\frac{17}{28}$ dänische; 14 Leipziger und 10 rheinländische aber machen $22\frac{3}{7}$ dänische Fuß aus; wie verhalten sich diese 3 verschiedenen Maße zu einander?

Aufl. Wenn der Leipziger Fuß x, der rheinische aber y

Einheiten hat, so sind 1) $12x + 15y = 25\frac{17}{28}$ und 2) $14x + 10y = 22\frac{3}{7}$, woraus $x = \frac{25}{28}$ und $y = \frac{139}{140}$. Dafer- ner $\frac{25}{28} = \frac{125}{140}$, so ist das Verhältniß dieser 3 Fuß zu einander, wie 125, 139 und 140.

10te Aufgabe. Was ist das für ein Bruch, der, wenn zu dem Nenner 1 addirt wird, $= \frac{1}{2}$, und wenn vom Zähler 2 subtrahirt werden, $= \frac{1}{3}$ ist?

Aufl. Der Zähler dieses Bruches sey $= x$, der Nenner $= y$, so ist der Bruch $\frac{x}{y}$. Nun aber ist: 1) $\frac{x}{y+1} = \frac{1}{2}$ und 2) $\frac{x-2}{y} = \frac{1}{3}$, woraus $x = 5$ und $y = 9$; der Bruch $\frac{5}{9}$ aber wird zu $\frac{5}{9+1} = \frac{1}{2}$ und $\frac{5-2}{9} = \frac{1}{3}$.

11te Aufgabe. Vor 8 Jahren, erwiederte ein, nach der Holztaxe seines Reviers befragter Förster, galt die Klafter harte $\frac{7}{4}$ell. Scheite 1 Thlr. 6 gr. und die Klafter $\frac{6}{4}$ell. weiche 12 gr. weniger als sie jetzt gilt; damals verhielt sich der Preis des harten Holzes zum Preise des weichen, wie 7 : 3; jetzt aber ist dieses Verhältniß wie 19 : 8; was kostet jetzt die Klftr. harte und die Klftr. weiche dergl. Scheite, und was galt sie vor 8 Jahren?

Aufl. 1) $x : y = 19 : 8$. 2) $x - 1\frac{1}{4} : y - \frac{1}{2} = 7 : 3$. Daraus folgt: $x = 4\frac{3}{4}$ Thlr. und $y = 2$ Thlr., für den jetzigen, und $4\frac{3}{4} - 1\frac{1}{4} = 3\frac{1}{2}$ Thlr., und $2 - \frac{1}{4} = 1\frac{1}{2}$ Thlr. für den ehemaligen Preis.

12te Aufgabe. Wenn von zwei Zahlen, x und y, die eine um $4 = a$, die andere um $3 = b$ Einheiten vermehrt wird, so übertrifft das Product dieser beiden Summen, nämlich $(x + a) \times (y + b)$, das Product der Zahlen selbst um $55 = c$ Einheiten; vermehrt man dagegen die eine dieser beiden Zahlen um $6 = d$, die andere um $4 = e$ Einheiten, so wird das Product der Zahlen um $86 = g$ Einheiten überstiegen; diese Zahlen sind?

Man erhält aus den Bedingungen: 1) $(x + a)(y + b) = xy + c$. 2) $(x + d)(y + e) = xy + g$. Hieraus erhält man: $x = \frac{ag - dc + be(a - d)}{ae - bd} = 5$ und $y = \frac{be(d - a) + ce - bg}{ae - bd} = 7$.

13te Aufgabe. Ein Forstbedienter gab das Alter zweier Fichtenpflanzungen also an: ziehe ich erst die Zahl Jahre der jüngeren von der älteren ab, addire zweitens die Alterzahl beider, und multiplicire drittens diese Alterzahlen mit einander, so erhalte ich 3 Größen, die sich zu einander verhalten wie die Zahlen 3, 5 und 12; wie alt war jede dieser Pflanzungen? Antw. Die ältere 12 u. die jüng. 3 J.

14te Aufgabe. Ein Saamenhändler hatte zwei, der Güte nach verschiedene Sorten Fichtensaamen zu zwei verschiedenen Preisen eingekauft. Er will diese Saamensorten vermischen und hiernach den Verkaufspreis bestimmen. Vermischt er nun $4 = a$ Pfund der besseren Sorte mit $5 = b$ Pfund der schlechteren, so kommt ihm das Pfund dieses Gemisches $14\frac{2}{3}$ gr. $= c$; vermischt er dagegen $7 = e$ Pfund der besseren Sorte mit $3 = g$ Pfund der schlechteren, so kommt ihm das Pfund $16\frac{1}{5}$ gr. $= h$; was kostet ihm das Pfund einer jeden Sorte?

Aufl. Von der besseren Sorte soll das Pfund x, von der schlechtern y gr. kosten; so ist: 1) $ax + by = c(a + b)$ 2) $ex + gy = h(e + g)$. Hieraus folgt:

$$x = \frac{(a+b)cg - (e+g)bh}{ag - be} = 18 \text{ gr.}$$

$$y = \frac{(e+g)ah - (a+b)ce}{ag - be} = 12 \text{ gr.}$$

15te Aufgabe. Ein Weinhändler hatte $48 = c$ Kannen Wein, die Kanne zu $12 = a$ gr. und $72 = d$ Kannen Wein, die Kanne zu $8 = b$ gr. eingekauft; er will davon zwei, an Kannen gleiche Gemische machen, wovon ihm bei der besseren Sorte die Kanne $10 = g$ gr., bei der geringeren Sorte

aber die Kanne 9 = h gr. zu stehen kommt; wieviel wird er von jeder Sorte nehmen müssen?

Aufl. Bezeichnet x die Kannenzahl, die er von der ersten Sorte zu der Mischung nehmen muß, wo ihm die Kanne 10 gr. zu stehen kommen soll, so ist, da im Ganzen $48 + 72 = 120$ Kannen vorhanden sind, $\frac{120}{2} = 60 = \frac{c+d}{2}$ die Anzahl Kannen, die jedes Gemisch enthalten wird, und $60 - x$ die Zahl Kannen, die er von der zweiten Sorte dazu nehmen muß. Bezeichnet ferner y die Kannenzahl, die er von der ersten Sorte, und $60 - y$ die, welche er von der zweiten Sorte zu dem schlechteren Gemisch nehmen muß, so erhält man folgende 2 Gleichungen aus den gegebenen Bedingungen:

1) $12x + 8\,(60 - x) = 10 \times 60$ oder allgemein

$$ax + b\left(\frac{c+d}{2} - x\right) = g\left(\frac{c+d}{2}\right)$$

2) $12y + 8\,(60 - y) = 9 \times 60$ oder allgemein

$$ay + b\left(\frac{c+d}{2} - y\right) = h\left(\frac{c+d}{2}\right)$$

Hieraus folgt: $x = 30$ oder allgemein $x = \frac{(g-b)(c+d)}{(2a-b)}$

und $y = 15$ " " $y = \frac{(h-b)(c+d)}{(2a-b)}$

Der Weinhändler muß nämlich, um 60 Kannen Wein zu 10 gr. zu erhalten, 30 Kannen à 12 gr., und $60 - x = 30$ Kannen à 8 gr. nehmen; um aber 60 Kannen à 9 gr. zu erhalten, muß derselbe 15 Kannen à 12 gr., und $60 - y = 45$ Kannen à 8 gr. nehmen.

16te Aufgabe. Drei Forstbediente erhalten zusammen 1500 Thlr. Besoldung. Gäbe der erste dem dritten jährlich 50 Th. von seiner Besoldung, so hätte letzterer gerade $2\frac{1}{2}$ mal so viel, als ersterer dann noch behalten würde; gibt aber der dritte dem ersten 50 Thlr., so hat letzterer erst $\frac{2}{3}$ mal soviel Besoldung, als jener noch behält; wieviel hatte ein jeder Besoldung?

Antw. Der erste hatte 350 Thlr., der zweite 500, und der dritte 650 Thlr. Besoldung.

17te Aufgabe. Das Alter eines Fichten- und eines daran stoßenden Buchenbestandes zusammengenommen, ist $67 = a$ Jahre, das einer hinter den Buchen gelegenen Ahornpflanzung, und das des Buchenbestandes zusammengenommen, ist $29 = b$ Jahre, und das der Ahornpflanzung und des Fichtenbestandes ist $58 = c$ Jahre; wie alt war jeder dieser Bestände?

Aufl. Der Fichtenbestand sey $= x$, der Buchenbestand $= y$, und die Ahornpflanzung $= z$ Jahre alt gewesen, so ist den Bedingungen zufolge: 1) $x + y = 67$, od. allgem. $x + y = a$, 2) $y + z = 29$ od. allgem. $y + z = b$, 3) $x + z = 58$ od. allgem. $x + z = c$. Hieraus folgt: $x = \frac{a+c-b}{2} = 48$, $y = \frac{a+b-c}{2} = 19$ und $z = \frac{b+c-a}{b} = 10$.

Bezeichnen a, b und c die Summen von zwei oder drei unbekannte Zahlen, so sind die hier für x, y und z angeführten allgemeinen Ausdrücke Formeln, mittelst welcher die unbekannten Zahlen gefunden werden können.

18te Aufgabe. In einem Holzmagazin finden sich dreierlei Sorten Klafterhölzer; nimmt man von den buchenen Klaftern 20 und legt sie zu den birkenen, so sind bei beiden gleichviel Klaftern; legt man aber von den kiefernen Klaftern 40 zu den birkenen, so sind bei letzteren 10 Klftrn. mehr, als bei ersteren noch bleiben; legt man endlich von den kiefernen Klaftern 30 zu den buchenen, so sind der buchenen Klaftern gerade soviel, als vorher kieferne vorhanden waren; wieviel Klftrn. waren es von jeder Sorte?

Antw. 120 buchene, 80 birkene und 150 kieferne Klaftern.

19te Aufgabe. Unter drei Forstdiener, die sich durch Anpflanzung von Eichen ausgezeichnet haben, soll eine Gratification von 450 Thlrn. folgendermaßen vertheilt werden. Derjenige, der die mehresten Schocke gepflanzt hat, soll für jedes Schock 2 gr. be-

kommen, das übrige Geld aber soll unter die beiden andern Forstbedienten, nach Verhältniß der angepflanzten Schockzahl, gleichmäßig vertheilt werden. Wird die Vertheilung dieser Vorschrift gemäß gemacht, so bekommt jeder der zwei übrigen Forstdiener pro ßo. 1 gr. 6 pf., erhielte dagegen der zweite pro ßo. 2 gr., so bekäme jeder der übrigen $1\frac{4}{7}$ gr. pro ßo., erhielte aber der dritte pro Schock 2 gr., so bekäme jeder der übrigen pro ßo. $1\frac{5}{8}$ gr. Wieviel Schock Eichen hatte jeder gepflanzt, und wieviel erhält jeder, dem Befehle gemäß, von der Gratification?

Antw. Der erste hatte 2700 Schock gepflanzt und erhielt 225 Thlr., der zweite 2100 ßo. und erhielt 131 Thlr. 6 gr., der dritte 1500 ßo. und erhielt 93 Thlr. 18 gr.

20ste Aufgabe. Wenn zu drei gegebenen Zahlen zur ersten 5, zur zweiten 6 addirt werden, so verhalten sich diese beiden Summen wie $4 : 5$; werden aber zur zweiten 8, zur dritten 6 addirt, so verhalten sich diese Summen wie $8 : 9$; werden endlich von der ersten 3 subtrahirt, zu der dritten Zahl aber 2 addirt, so verhält sich der Unterschied zur Summe, wie $1 : 2$. Welche Zahlen sind es?

Aufl. Die erste Zahl $= x$, die zweite $= y$, die dritte $= z$, geben die drei Proportionen. 1) $(x+5) : (y+6) = 4 : 5$, 2) $(y+8) : (z+6) = 8 : 9$, 3) $(x-3) : (z+2) = 1 : 2$, und durch Multiplication der mittlern und äußern Glieder erhält man: 1) $5x + 25 = 4y + 24$, 2) $9y + 72 = 8z + 48$, 3) $2x - 6 = z + 2$. Hieraus folgt: $x = 19$, $y = 24$ und $z = 30$.

21ste Aufgabe. Ein Forstbedienter wollte zu Wundmachung einer Blöße 3 Parthien Holzmacher benutzen; früher hatten die erste und zweite Parthie eine gleiche Arbeit in $6 = a$ Tagen, die erste und dritte Parthie in $8 = b$ Tagen, und die zweite und dritte Parthie in $10 = c$ Tagen vollendet. — Vorausgesetzt, daß diese Holzmacher wiederum so arbeiten, als bei den früheren Versuchen; wenn wird dann jede Parthie, einzeln genommen, die

Wundmachung dieser Blöße beendigen? und wieviel Tage werden erforderlich seyn, wenn alle drei Parthien zusammen arbeiten?

Aufl. Die Zahl der Tage, an welchen die erste Parthie allein arbeiten müßte, sey $= x$, die der zweiten Parthie $= y$, und die der dritten $= z$. Nach der, bei der 8ten Aufgabe des §s. 62 entwickelten Gleichung brächte die erste und zweite Parthie $\frac{xy}{x+y}$, die erste und dritte $\frac{xz}{x+z}$ und die zweite und dritte $\frac{yz}{y+z}$ Tage zu; alle drei Parthien aber würden $\frac{xyz}{xy+xz+yz}$ Tage zubringen, wenn nämlich an die Stelle der dort bekannten Größen a, b und c, die hier unbekannten x, y und z gesetzt werden. Den Bedingungen zufolge aber ist:

1) $\frac{xy}{x+y} = 6$ oder allgemein $\frac{xy}{x+y} = a$, 2) $\frac{xz}{x+z} = 8$ od. allg. $\frac{xz}{x+z} = b$, 3) $\frac{yz}{y+z} = 10$ od. allg. $\frac{yz}{y+z} = c$.

Hieraus folgen: $x = \frac{2abc}{bc+ac-ab} = 10\frac{10}{13}$ Tag, $y = \frac{2abc}{ab+bc-ac} = 14\frac{2}{17}$ Tag, $z = \frac{2abc}{ab+ac-bc} = 34\frac{2}{7}$ Tag. Alle drei Parthien würden aber (wenn in dem oben dafür gegebenen Ausdruck für x, y und z die gefundenen Werthe gesetzt und diese gehörig reducirt würden) $\frac{2abc}{ab+ac+bc} = 5\frac{5}{47}$ T. zubringen.

Diese Aufgabe kann jedoch auch folgendergestalt aufgelöst werden. Man nehme an, die Blöße sey $= 1$ Acker, und alle 3 Parthien zusammen brächten v Tage über deren Wundmachung zu, so erhält man aus den Bedingungen folgende 4 Gleichungen:

1) $(x + y)\ 6 = 1$ oder allgemein $(x + y)\ a = 1$
2) $(x + z)\ 8 = 1$ = = $(x + z)\ b = 1$

3) $(y + z)\ 10 = 1$ oder allgemein $(y + z)\ c = 1$

4) $(x + y + z)\ v = 1$ = $(x + y + z)\ v = 1$,

woraus ebenfalls obige Werthe folgen.

22ste Aufgabe. Die vier Forstreviere eines Amtes haben zusammen 6600 Acker Waldboden, und zwar verhält sich die Größe des ersten zu der des zweiten, wie 4 : 5, zu der des vierten aber, wie 4 : 7; die Größe des zweiten verhält sich hingegen zu der des dritten, wie 5 : 6; wie groß ist jedes dieser Reviere?

Aufl. Man erhält, wenn v die Größe des ersten, x die des zweiten, y die des dritten, und z die des vierten Reviers ausdrückt, 1) $v + x + y + z = 6600$; 2) $v : x = 4 : 5$; 3) $v : z = 4 : 7$, und 4) $x : y = 5 : 6$. Hieraus folgen: $v = 1200$, $x = 1500$, $y = 1800$ und $z = 2100$ Acker.

23ste Aufgabe. Vier Forstbediente dienten zusammen 195 Jahre und erhielten wegen ihrer langen Dienstzeit eine Gratification von 300 Thlrn., die nach Verhältniß der Jahre, die ein jeder diente, vertheilt werden sollte. Nun betrug die Dienstzeit von A und D gerade 1 Jahr weniger, als die von B und C; die von A und C aber betrug 3 Jahre mehr, als die von B und D; hingegen hatte A gerade 5 Jahre länger gedient, als D. Wie lange hatte jeder dieser Forstbedienten gedient? und was erhielt jeder von der Gratification?

Aufl. Die Jahre der Dienstzeit von A $= v$, die von B $= w$, die von C $= x$ und die von D $= z$ angenommen, gibt 1) $v + w + x + z = 195$; 2) $v + z + 1 = w + x$; 3) $v + z = w + z + 3$; 4) $v = z + 5$. Hieraus folgen: $v = 51$, $w = 50$, $x = 48$ und $z = 46$. Werden nun 300 nach den angegebenen Verhältnissen, mittelst der unter §. 58 stehenden Regeln getheilt, so bekommt A $78\frac{6}{13}$ Thlr., B $76\frac{12}{13}$ Thlr., C $73\frac{1}{13}$ Thlr. und D $70\frac{10}{13}$ Thlr.

24ste Aufgabe. Die 4 Ziffern, womit eine Zahl geschrieben wird, sind durch folgende Eigenschaften verschieden, wobei jedoch

nicht auf ihren, durch das decatische Gesetz bewirkten Rang gesehen wird. Die Summe der ersten und dritten Ziffer = der Summe der zweiten und vierten; die Summe der zweiten und dritten Ziffer = der ersten und doppelten vierten; die Summe der ersten und zweiten Ziffer aber ist um 2 kleiner, als die Summe der dritten und vierten, und die Summe aller 4 Ziffern = 18. Diese Zahl ist?

Aufl. Die erste Ziffer zur linken = v, die zweite = x, die dritte = y und die vierte = z; so ist:

1) $v + x + y + z = 18$
2) $v + y = x + z$
3) $x + y = v + 2z$
4) $v + x = y + z - 2$.

Hieraus folgt: $v = 3$, $x = 5$, $y = 6$, $z = 4$. Die gesuchte Zahl ist also 3564.

Fünfter Abschnitt.

Rechnungen mit Exponential- und Wurzelgrößen,

Gleichungen und algebraische Aufgaben des zweiten Grades.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Erklärungen.

§. 67.

Jede Größe, deren Exponent größer oder kleiner, als die Einheit ist, wird im weiteren Sinne eine Exponentialgröße genannt; im engeren Sinne aber versteht man unter Exponentialgrößen solche, wo der Exponent durch eine unbekannte Größe (x) dargestellt erscheint. In diesem Abschnitt ist nur von ersteren die Rede.

Das Wurzelausziehen ist gerade die entgegengesetzte Operation von dem bereits im §. 24 erwähnten Erheben der Größen zu höheren Potenzen — dem Potenziren. Man kann dasselbe als eine Division ansehen, wenn man das Potenziren für eine Multiplication annimmt.

Das Ausziehen der Wurzel wird durch das Zeichen $\sqrt{}$ angedeutet, unter welches die Größe gesetzt wird, aus der die Wurzel gezogen werden soll. Ueber dieses Zeichen wird der Wurzel-

exponent gesetzt, oder diejenige Größe, welche anzeigt, die wievielste Potenzwurzel aus der unter dem Zeichen stehenden Größe gezogen werden soll; steht aber das Wurzelzeichen ohne Exponenten, so zeigt dies, daß aus der unter demselben stehenden Größe die zweite Potenz, nämlich die Quadratwurzel, gezogen werden soll. Ist der Wurzelexponent = dem Exponenten der Größe unter dem Zeichen, so ist diese Größe, mit dem Exponenten 1, die gesuchte Wurzel, nämlich $\sqrt[n]{a^n} = a$, $\sqrt[3]{3^3} = \sqrt[3]{27} = 3$.

Die Wurzel aus einer beliebigen Größe a ziehen, hieße demnach eben soviel, als eine andre Größe b finden, mit der die positive Einheit so vielmal multiplicirt, als der Wurzelexponent Einheiten hat, die gegebene Größe a wieder zum Product gibt. Wäre z. B. $\sqrt[4]{a} = b$, so wäre b von der Beschaffenheit, daß $1 \times b \times b \times b \times b = a$. Eben so wäre $\sqrt{4} = 2$, weil $1 \times 2 \times 2 = 4$, $\sqrt[3]{216} = 6$, weil $1 \times 6 \times 6 \times 6 = 216$, überhaupt $\sqrt[n]{a^n} = a$, weil $1 \times a \times a \times a \ldots = a^n$.

§. 68.

Jede Potenz mit geraden Exponenten (2, 4, 6, 8.. $2n$) ist positiv, die Wurzel, woraus dieselbe hervorgegangen, mag nun positiv oder negativ seyn; so ist z. B. $-a \times -a = +a^2$. Daher kann auch die Wurzel einer Größe mit geraden Wurzelexponenten sowohl positiv als negativ seyn; es ist nämlich $\sqrt{a^{2n}} = \pm a^n$; denn $a^n \times a^n = a^{2n}$ und $-a^n \times -a^n = +a^{2n}$. Hingegen ist das Ausziehen der Wurzeln mit geraden Wurzelexponenten aus negativen Größen unmöglich. Die Ausdrücke $\sqrt{-a}$ oder $\sqrt[4]{-32}$, oder $\sqrt[2n]{-a^{2n}}$, werden deßhalb imaginäre oder eingebildete Größen genannt.

Dagegen ist jede Potenz mit einem ungeraden Exponenten (3, 5, 7.. $2n+1$) positiv, wenn die Wurzel positiv, und negativ, wenn die Wurzel negativ ist. Eben so ist die Wurzel

eines ungeraden Wurzelexponenten positiv, wenn die Größe unter dem Zeichen positiv, und negativ, wenn diese Größe negativ erscheint. So ist z. B. $\sqrt[3]{-27} = -3$, weil $1 \times -3 \times -3 \times -3 = -27$. Eben so ist $\sqrt[5]{-a^5} = -a$ od. $\sqrt[2n+1]{\pm a^{2n+1}} = \pm a$.

So wie man die zweite Potenz einer Größe das Quadrat, die dritte den Cubus ꝛc. nennt, so versteht man auch unter der Quadratwurzel eine Größe, die den Wurzelexponenten 2, und unter der Cubikwurzel, die den Wurzelexponenten 3 hat.

Kann die Wurzel aus der, unter dem Zeichen stehenden Größe nicht genau ausgezogen werden, d. h. ist die gefundene Wurzel, wenn sie zu der Potenz, die der Wurzelexponent anzeigt, wieder erhoben wird, nicht ganz gleich der unter dem Wurzelzeichen stehenden Größe, so werden die mit dem Wurzelzeichen versehenen Größen irrational genannt, z. B. $\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{9}$ ꝛc. Bei diesen Größen können die Wurzeln nur durch Annäherung an die wahre Wurzel bestimmt werden; so ist z. B. $\sqrt{5} = 2{,}23606\ldots$ oder $\sqrt[3]{18} = 2{,}62074\ldots$ Die erste dieser beiden Wurzeln wird durch Erhebung zum Quadrat $= 4{,}99996\ldots$

§. 69.

Ein Product wird zu einer Potenz erhoben, wenn jeder Factor für sich zu der verlangten Potenz erhoben wird. Soll z. B. 3×2 zur zweiten Potenz erhoben werden, so ist $(3 \times 3) \times (2 \times 2) = 9 \times 4 = 36$; allgemein ist $(abcd)^n = a^n b^n c^n d^n$.

Eben so kann die Wurzel aus einem Product gezogen werden, wenn man aus jedem Factor, einzeln genommen, die Wurzel zieht; so ist z. B. $\sqrt[n]{a^n b^n c^{2n}} = abc^2$.

Jede, schon auf einer beliebigen Potenz stehende Größe kann wieder zu andern Potenzen erhoben werden, wenn man den Exponenten der Größe mit dem Exponenten der Potenz, zu welcher sie

erhoben werden soll, multiplicirt. Sollte z. B. 4^2 in die dritte Potenz erhoben werden, so wäre $4^{2 \cdot 3} = 4^6 = 4096$. Eben so ist $(a^4)^3 = a^{12}$; $((a^m)^n)^p = a^{mnp}$; $(-ab^mc^nd^p)^2 = a^2b^{2m}c^{2n}d^{2p}$ (hier muß nämlich das Zeichen — in + verwandelt werden, weil der Exponent 2 gerad ist); $(-p^5c^md^n)^3 = -p^{15}c^{3m}d^{3n}$; $(a^{-m})^3 = \left(\frac{1}{a^m}\right)^3 = \frac{1}{a^{3m}} = a^{-3m}$;

$(a^mb^{-n})^2 = a^{2m}b^{-2n} = \frac{a^{2m}}{b^{2n}}$; $((-a^2b^mc^{-1})^2)^m = a^{4m}b^{2mm}c^{-2m} = \frac{a^{4m}b^{2m^2}}{c^{2m}}$

Eben so kann aus jeder, mit einem Wurzelzeichen versehenen Größe abermals eine beliebige Wurzel gezogen werden, wenn man die Exponenten beider Wurzelzeichen mit einander multiplicirt; das Product ist der in das Zeichen zu setzende Wurzelexponent. Z. B.

$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3.2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$; $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$;

$\sqrt[p]{(\sqrt[n]{a^m})^q} = \sqrt[np]{a^{mq}}$; $\sqrt[5]{\sqrt[m]{\sqrt{a^n}}} = \sqrt[6m]{a^n}$; $\sqrt[m]{\sqrt{(\sqrt[n]{b})^2}} = \sqrt[2mn]{b^2} = \sqrt[mn]{b}$.

Ein Bruch wird zu einer verlangten Potenz erhoben, wenn man Zähler und Nenner, jeden für sich, zu dieser Potenz erhebt. Eben so kann die Wurzel aus einer gebrochenen Größe gezogen werden, wenn man dieselbe aus dem Zähler und Nenner, jeden für sich genommen, zieht; z. B. $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$; $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$; $\sqrt[5]{2\frac{7}{8}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$; $\sqrt[m]{\frac{a^{2n}}{b^{3n}}} = \frac{a^2}{b^3}$

§. 70.

Bei jeder Größe, die mit einem gebrochenen Exponenten versehen ist, ist der Nenner dieses Exponentenbruches der Wurzelexponent, der Zähler desselben aber der Exponent der

Größe. Man kann daher jede mit einem gebrochenen Exponenten behaftete Größe als eine Wurzelgröße darstellen, wenn man den Nenner des Bruches über das Wurzelzeichen und die Größe mit dem Zähler (als Exponent) unter das Zeichen setzt; z. B. $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$; $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$; $4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2}$; $a^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{a^2}$; $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}} = \sqrt{a} \times \sqrt[3]{b^2} = \sqrt[6]{a^3} \times \sqrt[6]{b^4} = \sqrt[6]{a^3b^4}$; $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{5}{4}} = \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[4]{b^5} = \sqrt[12]{a^8} \times \sqrt[12]{b^{15}} = \sqrt[12]{a^8b^{15}}$.

Umgekehrt kann jede, mit einem Wurzelzeichen behaftete Größe als eine mit gebrochenen Exponenten dargestellt werden, wenn man den Exponenten der Größe durch den Wurzelexponenten dividirt, d. h. ersteren zum Zähler, letzteren zum Nenner des Exponentenbruches macht; z. B. $\sqrt[4]{5^3} = \pm 5^{\frac{3}{4}}$; $\sqrt{2} = \pm 2^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[6]{5^4} = \pm 5^{\frac{4}{6}} = \pm 5^{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[9]{a^3} = a^{\frac{3}{9}} = a^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[4]{a^8b^{12}} = \pm a^{\frac{8}{4}}b^{\frac{12}{4}} = \pm a^2b^3$; $\sqrt[3]{-a^6b^9} = -a^2b^3$; $\sqrt[4]{a^8b^{-4}} = \pm a^2b^{-1} = \pm \frac{a^2}{b}$; $\sqrt[3]{a^5b^{-2}} = \frac{a^{\frac{5}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}}$; $\sqrt[6]{a^3b^6c^4} = \pm a^{\frac{1}{2}}bc^{\frac{2}{3}}$. Der Werth der Wurzelgröße bleibt nämlich gleich, wenn der Wurzelexponent und der Exponent der Größe unter dem Zeichen mit einer gleichen Größe multiplicirt oder dividirt werden.

Zweites Kapitel.
Ausziehung der Quadratwurzel.

§. 71.

A) Aus Größen, die durch Buchstaben bezeichnet sind.

Aus einer eingliedrigen Größe wird die Quadratwurzel gezogen, wenn man aus dem Coefficienten dieser Größe, mit Hülfe des, in §. 73 folgenden Wurzeltäfelchens, die Quadratwurzel zieht, den Exponenten der Größe aber durch 2 dividirt und die Größe (den Buchstaben mit dem erhaltenen Quotient-Exponenten) an die

Wurzel des Coefficienten setzt. Folgende Beispiele werden dieses Verfahren versinnlichen.

1) $\sqrt{4a^2} = 2a$

2) $\sqrt{9a^4b^2c} = 3a^2bc^{\frac{1}{2}}$

3) $\sqrt{16a^3b^4c^2} = 4a^{\frac{3}{2}}b^2c$

4) $\sqrt{\frac{9a^2b^2c^4}{4d^2}} = \frac{3abc^2}{2d}$

5) $\sqrt{9a^2b^4c^{-2}} = 3ab^2c^{-1} = \frac{3ab^2}{c}$

6) $\sqrt{\frac{4a^4b^2c^3}{9d^4}} = \frac{2a^2bc^{\frac{3}{2}}}{3d^2} = \frac{2a^2bc^{\frac{1}{2}}d^{-2}}{3}$

7) $\sqrt{\left(\frac{8a^4b^3c^5}{d}\right)\left(\frac{2a^2bc^3}{d^3}\right)} = \sqrt{\frac{16a^6b^4c^8}{d^4}} = \frac{4a^3b^2c^4}{d^2}$

8) $\sqrt{\frac{a^3b^3c}{2d}} \times \frac{8d^3}{abc^3} = \sqrt{\frac{4a^4b^2d^2}{c^2}} = \frac{2a^2bd}{c}$

§. 72.

Das Quadrat einer jeden beliebigen zweigliedrigen Größe (eines Binomiums), z. B. das der Größe $a + b$, bestehet:

1) aus dem Quadrate des ersten Theils $= a^2$, 2) aus dem doppelten Producte beider Theile $= 2ab$, und 3) aus dem Quadrate des zweiten Theils $= b^2$. Das also erhaltene Quadrat $a^2 + 2ab + b^2$ betrachtet man als die Formel, nach welcher die Quadratwurzel aus mehrgliedrigen Größen ausgezogen wird. Jedes durch Buchstaben-Größen ausgedrückte Quadrat kann nämlich — wenn es auch aus mehr als 3 Gliedern bestehet, als von einer zweigliedrigen Wurzel entstanden, angesehen, und aus demselben mittelst der obigen Formel die Wurzel gezogen werden: wenn man die bereits bestimmten Theile der Wurzel als den ersten (das a der Formel), jeden noch fehlenden aber als den zweiten Theil (das b der Formel) ansieht.

Sollte z. B. aus der Größe $4a^6 + 12a^3b + 9b^2 - 4a^3c$

$-6bc+c^2$ die Quadratwurzel gezogen werden, so verfahre man nach folgenden Regeln.

1) Man ordne die gegebene Größe nach den Potenzen des in ihr am häufigsten vorkommenden Buchstabens so, daß dieser Buchstabe, in der höchsten Potenz stehend, das erste Glied bildet.

2) Aus diesem ersten Glied ziehe man die Quadratwurzel nach vorigem §., so erhält man in ihr das a der oben angegebenen Formel; hier ist dasselbe $= 2a^3$.

3) Diesen gefundenen ersten Theil der Wurzel wieder zum Quadrat erhoben und von dem ersten Glied der gegebenen Größe abgezogen, bringt letzteres auf Null.

4) Den gefundenen ersten Theil der Wurzel multiplicire man mit 2, so erhält man hier $4a^3$ (das $2a$ der Formel) und in ihm zugleich den Divisor, mit welchem das folgende Glied — hier $12a^3b$ — dividirt werden muß, um in $3b$ den zweiten Theil (das b der Formel) zu bekommen.

5) Mit diesem gefundenen zweiten Theile multiplicire man den Divisor und ziehe das erhaltene Product, hier $12a^3b$ (das $2ab$ der Formel), so wie das Quadrat dieses zweiten Theils, hier $9b^2$ (das b^2 der Formel) von den gleichnamigen Gliedern ab. Wäre die Wurzel nur zweigliedrig, so wäre die Operation beendiget; da aber dieselbe hier dreigliedrig ist, so betrachte man

6) die nun bekannten zwei Theile der Wurzel, nämlich $2a^3+3b$, wiederum als den bekannten ersten Theil (das a der Formel), multiplicire solche abermals mit 2, so erhält man hier in $4a^3+6b$ den neuen Divisor (das $2a$ der Formel) und durch Division in das Glied $-4a^3c$, in $-c$ den 3ten Theil der Wurzel (das b der Formel). Verfährt man mit diesem dritten Theil genau nach Regel 5, so wird durch Abziehen der erhaltenen Größen $-4a^3c-6bc+c^2$ von den gleichnamigen Gliedern die gegebene Größe auf Null gebracht, die Wurzel derselben ist also in diesem Falle rational und hier $= 2a^3+3b-c$.

7) Bestände die Wurzel aus mehr als 3 Gliedern, so dürf-

ten nun die bereits bekannten drei Glieder als der erste Theil (das a der Formel) angesehen, und mit denselben nach den gegebenen Regeln verfahren werden, um das folgende 4te Glied der Wurzel zu erhalten. Eben so würde das 5te 6te ... $n$te Glied erhalten, wenn man die bekannten 4, 5... $n-1$ Glieder als den ersten Theil einer zweigliedrigen Wurzel betrachtete. Damit der Anfänger im Stande sey zu bestimmen, ob aus einer gegebenen Größe die Quadratwurzel rational ausgezogen werden kann oder nicht, merke derselbe folgendes:

1) Die gegebene Größe muß aus $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ Gliedern bestehen, wenn die Wurzel aus n Gliedern bestehet, wovon jedes Glied wenigstens einen andern Buchstaben hat; hat die Größe mehr oder weniger Glieder, so hat dieselbe keine rationale Wurzel; in unserm Beispiele war $n = 3$ und die Anzahl der Glieder $= 6$; 4, 5, 7, 8 oder 9 Glieder geben keine rationale Wurzel; denn wenn $n = 4$, so ist die Zahl der Glieder $= 10$.

2) Jeder der darinnen vorkommenden Buchstaben muß einmal als reines Quadrat, oder allgemein unter der Form a^{2n}, und einmal mit jedem andern der in der Wurzel vorkommenden Buchstaben verbunden erscheinen.

3) Die reinen Quadrate der Größen (nämlich die a^{2n}) müssen alle positiv erscheinen; das erste Glied der geordneten Größe muß das Quadrat des ersten Theils der Wurzel seyn.

4) In dem Quadrate einer zweigliedrigen Wurzel kann nur ein negatives Glied, in dem Quadrate einer dreigliedrigen Wurzel können nur zwei negative Glieder, und in dem Quadrate einer viergliedrigen Wurzel können nur drei oder vier, nicht aber zwei oder fünf negative Glieder vorkommen.

5) Die Summe der Exponenten aller in einem Gliede vorkommenden Buchstaben muß durch 2 ohne Rest theilbar seyn.

Die Auflösung der folgenden 6 Aufgaben, wovon die erste

die bereits erklärte ist, werden dem Anfänger die gegebenen Regeln anschaulich machen.

1) $\sqrt{4a^6+12a^3b+9b^2-4a^3c-6bc+c^2} = 2a^3+3b-c$

$4a^6$

$-$

$12a^3b+9b^2$

Div. $4a^3$: $12a^3b+9b^2$ (Quadrat des zweiten Theils)

$-$ $-$

$-4a^3c-6bc+c^2$

Divisor: $4a^3+6b$: $-4a^3c-6bc+c^2$ (□ des 2. Theils)

$+$ $+$ $-$

2) $\sqrt{\frac{16a^4-8a^2b^2+b^4}{4c^4+4bc^2+b^2}} = \frac{4a^2-b^2}{2c^2+b}$

3) $\sqrt{4a^{2m}+4a^mb^n+b^{2n}+2a^mc^3+b^nc^3+\frac{c^6}{4}} = 2a^m+b^n+\frac{c^3}{2}$

$4a^{2m}$

$-$

$4a^mb^n+b^{2n}$

Div. $4a^m$: $4a^mb^n+b^{2n}$ (Quadrat des zweiten Theils)

$-$ $-$

$2a^mc^3+b^nc^3+\frac{c^6}{4}$

Divisor: $4a^m+2b^n$: $2a^mc^3+b^nc^3$ (Doppeltes Product des ersten und zweiten Theils)

$-$ $-$

Quadrat des zweiten Thrils $\frac{c^6}{4}$

$-$

4) $\sqrt{a^2+2ab+b^2-2ac-2ad-2bc-2bd+c^2+2cd+d^2}$
$= a+b-c-d$

5) $\sqrt{\frac{9a^4}{4}-2a^2b^n+\frac{4b^{2n}}{9}-\frac{3a^2c^m}{4}+\frac{b^nc^m}{3}+\frac{c^{2m}}{16}} =$
$\frac{3a^2}{2}-\frac{2b^n}{3}-\frac{c^m}{4}$

6) $\sqrt{\frac{9a^{2n-2}b^2}{16c^{2m}} - \frac{3a^{n-1}b^3}{2c^m} + b^4 + \frac{d^n g^2}{2ac} - \frac{2c^{m-1}d^n g^2 b}{3a^n} + \frac{c^{2m-2}d^{2n}g^4}{9a^{2n}b^2}} = \frac{3a^{n-1}b}{4c^m} - b^2 + \frac{c^{m-1}d^n g^2}{3a^n b}$

Anmerk. zur 6ten Aufgabe. Das doppelte Product des ersten Theils ist hier $= \frac{3a^{n-1}b}{4c^m} \times 2 = \frac{3a^{n-1}b}{2c^m}$; man erhält durch Division in das Glied $- \frac{3a^{n-1}b^3}{2c^m}$ den zweiten Theil, $-b^2$, der Wurzel, dessen Quadrat das dritte Glied, b^4, auf Null bringt. Das doppelte erste Glied der Wurzel ist nun $\left(\frac{3a^{n-1}b}{4c^m} - b^2\right)2 = \frac{3a^{n-1}b}{2c^m} - 2b^2$. Mit dem ersten Theile dieses Divisors in das vierte Glied dividirt, gibt in $\frac{d^n g^2}{2ac} : \frac{3a^{n-1}b}{2c^m} = \frac{d^n g^2}{2ac} \times \frac{2c^m}{3a^{n-1}b} = \frac{c^{m-1}d^n g^2}{3a^n b}$ das dritte Glied der Wurzel.

§. 73.

B) Aus Zahlen.

Aus jedem Quadrat, das nicht größer als 100, so wie aus jedem Cubus, der nicht größer als 1000 ist, kann die Quadrat- und Cubikwurzel mittelst des nachstehenden Täfelchens, dessen obere Horizontalreihe die Wurzeln, die mittlere die dazu gehörigen Quadrate, und die untere die dazu gehörigen Cuben enthält, ausgezogen werden.

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Cuben	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Jede Quadratwurzel, die größer als 10 ist, kann man sich ebenfalls als ein Binomium von der Form $a + b$ vorstellen, wenn man sich unter a die Zehner, Hunderte, Tausende ꝛc., unter b aber die Einer der gegebenen Zahl denkt. Wäre z. B. 64 die

Wurzel, so ist $a = 60$ und $b = 4$; wäre 256 die Wurzel, so ist $a = 250$ und $b = 6$; wären aber erst zwei Theile dieser Wurzel bekannt, so wäre $a = 20$, $b = 5$. Man kann sich demnach bei der Ausziehung der Wurzel aus Zahlen ebenfalls der in §. 71 angegebenen Formel bedienen, wenn man nur dabei das decadische Gesetz der Zahlen berücksichtiget.

Um aus einer mehrzifferigen Größe, z. B. aus 278784, die Quadratwurzel zu ziehen, beobachte man folgende Regeln.

1) Man theile die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Klassen, deren jede 2 Ziffern hat; dabei kann jedoch die erste Klasse zur Linken auch nur aus einer Ziffer bestehen, wenn nämlich die Anzahl der Ziffern ungerade ist.

2) Ziehe man aus der ersten Klasse links die Wurzel mittelst des obigen Täfelchens, indem man aus selbigem die Wurzel desjenigen Quadrats entnimmt, welches der in dieser Klasse enthaltenen Größe am nächsten kommt; kleiner oder gleich dieser Größe darf dasselbe seyn, doch nicht größer (hier ist 25 das Quadrat, welches der in der ersten Klasse enthaltenen Größe 27 am nächsten kommt); daher ist 5 das erste Glied der Wurzel $=$ dem a der Formel.

3) Das Quadrat dieses gefundenen ersten Gliedes ziehe man von der ersten Klasse ab und setze zum Rest die erste Ziffer der nächstfolgenden Klasse.

4) In diese Größe dividire man mit dem doppelten ersten Theil der Wurzel (den $2a$ der Formel, hier $= 2 \times 5$), so erhält man in dem Quotienten den zweiten Theil der Wurzel (hier 2). Multiplicirt man mit demselben den Divisor und zieht dieses Product von den bereits untenstehenden Ziffern ab, setzt zu dem bleibenden Rest die noch obenstehende zweite Ziffer und zieht von diesem das Quadrat des gefundenen zweiten Theils ab, so ist die Operation beendigt, wenn die Wurzel nur zweigliedrig ist; ist dieselbe

aber mehrgliedrig, so betrachte man

5) die gefundenen zwei Glieder als den ersten Theil, multiplicire selbige mit 2 und dividire mit diesen ($2a$) in den bei der vorigen Subtraction gebliebenen Rest, zu welchem vorher die erste Ziffer der nächstfolgenden (dritten) Klasse herabgesetzt werden muß, so bekommt man (hier in 8) das dritte Glied der Wurzel. Mit diesem verfahre man genau so, wie es unter Regel 4 angegeben.

Besteht die Wurzel aus mehr als drei Gliedern, so betrachte man stets die schon bekannten 3, 4, 5 . . $n - 1$ Glieder als den ersten Theil (a) und suche nach Regel 4 und 5 die noch fehlenden Glieder. — Das einzelne Herabsetzen der zwei Ziffern jeder Klasse kann auf einmal vorgenommen werden; eben so die Subtraction des doppelten Products beider Theile und die des Quadrats des zweiten Theils; nur merke man: daß die Division mit $2a$ sich nur bis zur ersten herabgesetzten Ziffer erstrecken darf; eben so muß die erste Ziffer rechts von dem erhaltenen doppelten Producte (den Einern), unter die herabgesetzte erste Ziffer, die erste Ziffer des Quadrats des zweiten Theils (ebenfalls die Einer) aber unter die herabgesetzte zweite Ziffer zu stehen kommen. — Um dies deutlicher einzusehen, ist die erste der folgenden 6 Aufgaben (das hier beschriebene Beispiel) doppelt aufgelöst.

1) $\sqrt{27\,|\,87\,|\,84} = 528$

25

2.5=10 : 28

20 = d. $2ab$ d. Formel.

87

4 = den b^2 d. Formel.

52.2=104 : 838

832 = d. $2ab$ d. Ferm.

64

64 = d. b^2 d. Form.

1) $\sqrt{27\,|\,87\,|\,84} = 528$

25 = den a^2 der Formel.

5.2=10 : 287

20 = d. $2ab$ der Formel.

4 = d. b^2 = =

52.2=104 : 8384

832 = d. $2ab$ d. Formel

64 = d. b^2 = =

2) $\sqrt{53\,31\,48\,1} = 2309$

3) $\sqrt{16\,16\,44\,20\,25} = 40205$

4) $\sqrt{}579673036\,96 = 240764$
5) $\sqrt{}1367402066\,56 = 369784$
6) $\sqrt{}25200701600900 = 5020030$

§. 74.

Hängt man bei einer Zahl, die keine rationale Wurzel zuläßt, an die letzte Klasse so vielmal zwei Nullen, als man bei der Wurzel Decimalstellen zu entwickeln gedenkt, so kann man sich der wahren Wurzel zwar so weit nähern, als man will, oder so weit die Genauigkeit der Rechnung es erfordert, nie aber wird man die Wurzel einer irrationalen Zahl ganz richtig ausdrücken können.

Folgende 6 Aufgaben dienen zur Uebung.

1) $\sqrt{}5 = 2{,}23606\ldots$

Ausübung.

5|00|00|00|00|00 | 2,23606
4

100
$2\times2=4$: 8
$2^2 =$ 4

1600
$22\times2=44$: 132
$3^2 =$ 9

27100
$223\times2=446$: 2676
$6^2 =$ 36

$2236\times2=4472$: 30400 00
$22360\times2=44720$: 268320
36

356764

2) $\sqrt{}26 = 5{,}099020\ldots$
3) $\sqrt{}294 = 17{,}1464\ldots\ldots$
4) $\sqrt{}2 = 1{,}414214\ldots$
5) $\sqrt{}4376 = 66{,}15134\ldots$
6) $\sqrt{}337 = 18{,}3575597503\ldots$

§. 75.

Wie die Wurzel aus einem Bruch gezogen wird, ward in §. 69 bereits im Allgemeinen erwähnt.

Ist nun bei dem gegebenen Bruch Zähler und Nenner rational, so macht das Ausziehen der Wurzel weiter keine Schwierigkeiten; ist jedoch eine dieser beiden Größen irrational, oder sind es beide, so macht man im letztern Falle den Nenner dadurch rational, daß man den Zähler und Nenner des gegebenen Bruches mit dem Nenner multiplicirt. Sodann ziehe man die Wurzel sowohl aus dem rationalen Nenner, als aus dem multiplicirten irrationalen Zähler, und dividire die letztere durch die erstere. So ist z. B. bei dem Bruch $\frac{2}{5}$ Zähler und Nenner irrational, er wird aber, nach Obigem, zu $\frac{2\times5}{5\times5} = \frac{10}{25}$ und $\sqrt{\frac{10}{25}} = \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{3{,}16227..}{5} = 0{,}63245.. = \sqrt{\frac{2}{5}}$

Aus einem Decimalbruche wird die Wurzel gleichwie aus einer ganzen Zahl gezogen, nur muß der Bruch eine gerade Anzahl Decimalstellen enthalten (nämlich 2, 4, 6 .. $2n$); ist dies nicht der Fall, so kann dies durch eine hinten angehängte Null bewirkt werden.

Läßt sich nun ein gemeiner Bruch, aus dem die Wurzel gezogen werden soll, genau in einen Decimalbruch verwandeln, so kommt man am schnellsten zum Ziele, wenn man dies thut und aus dem erhaltenen Decimalbruch die Wurzel zieht.

Von den folgenden 6 Aufgaben sind die zwei ersten durch beide Methoden aufgelöst.

1) $\begin{cases} \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1{,}732051}{2} = 0{,}866025... \\ \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{0{,}75} = \sqrt{0{,}750000000000} = 0{,}866025.. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt{2\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{4{,}89898}{3} = 1{,}63299.. \\ \sqrt{2\frac{2}{3}} = \sqrt{2{,}6666666666..} = 1{,}63299.. \end{cases}$

3) $\sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{0{,}4} = \sqrt{0{,}4000000000..} = 0{,}63245..$

4) $\sqrt{2\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{3{,}16227}{2} = 1{,}58113..$

5) $\sqrt{5\frac{7}{8}} = \sqrt{\frac{47}{8}} = \sqrt{\frac{376}{64}} = \frac{\sqrt{376}}{8} = \frac{19{,}3907..}{8} =$
$2{,}4238..$

6) $\sqrt{\frac{3}{14}} = \sqrt{\frac{42}{14\times14}} = \frac{\sqrt{42}}{14} = \frac{6{,}48074..}{14} = 0{,}46291..$

§. 76.

Auch für Buchstabenausdrücke, welche keine vollkommenen Quadrate bilden, läßt sich eine Näherungswurzel, mittelst Anwendung der in §. 72 gegebenen Formel bestimmen. Entwickelt man die Werthe dieser Glieder in Zahlen, bei einem beliebig angenommenen Werthe für die darinnen vorkommenden Buchstaben, so bekommt man dadurch gleichfalls die Näherungswurzel der für selbige angenommenen irrationalen Werthe. Setzen wir z. B. in der ersten der folgenden 4 Aufgaben $a = 2$ und $b = 1$, so ist $\sqrt{(a^2 - b^2)} = \sqrt{3}$; die bei dieser Aufgabe entwickelten Glieder in Zahlen ausdrückt, aber sind: $2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{64} - \frac{1}{512} - \frac{5}{8192} = 2 - \frac{2197}{8192} = 1{,}7318\ldots = \sqrt{3}$

Noch bemerke ich, daß die Glieder der bei den folgenden Aufgaben entwickelten Wurzeln nach einem leicht in die Augen fallenden Gesetze steigen, also leicht vermehrt werden können, wenn nur erst durch einige, nach der Formel entwickelte Glieder dieses Gesetz bekannt ist.

1) $\sqrt{(a^2 - b^2)} = a - \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} - \frac{b^6}{16a^5} - \frac{5b^8}{128a^7}\ldots$

a^2

$-b^2 : 2a$

$-b^2 + \frac{b^4}{4a^2}$ (dopp. Prod. u. Quadr. d. 2. Theils)

$-\frac{b^4}{4a^2} : 2a - \frac{b^2}{a}$ (dopp. Prod. d. 1. Theils)

$-\frac{b^4}{4a^2} + \frac{b^6}{8a^4} + \frac{b^8}{64a^6}$ (dopp. Prod. beider Theile und □ des 2. Theils)

$-\frac{b^6}{8a^4} - \frac{b^8}{64a^6}$ und so weiter.

2) $\sqrt{(a^2+b^2)} = a + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} + \frac{b^6}{16a^5} - \frac{5b^8}{128a^7} \cdots$

3) $\sqrt{(1-a)} = 1 - \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8} - \frac{a^3}{16} - \frac{5a^4}{128} \cdots$

4) $\sqrt{(1+a)} = 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8} + \frac{a^3}{16} - \frac{5a^4}{128} \cdots$

Drittes Kapitel.

Ausziehung der Cubikwurzel.

§. 77.

A) Aus Größen, die durch Buchstaben bezeichnet sind.

Aus einer eingliedrigen Größe wird die Cubikwurzel gezogen, wenn man, mittelst der, in §. 73 gegebenen Tafel, die $\sqrt[3]{}$ aus dem Coefficienten dieser Größe zieht, den Exponenten derselben aber mit 3 dividirt und den (oder die) Buchstaben mit den Quotientexponenten an die Wurzel des Coefficienten setzt.

Die folgenden 6 Aufgaben versinnlichen das Verfahren.

1) $\sqrt[3]{27a^6} = 3a^2$

2) $\sqrt[3]{\frac{8a^2b^6}{c^3}} = \frac{2a^{\frac{2}{3}}b^2}{c}$

3) $\sqrt[3]{\frac{3^6a^6c^{-3}d^3}{27b^6c^3}} = \frac{3^2a^2c^{-1}d}{3b^2c} = \frac{3a^2d}{b^2c^2}$

4) $\sqrt[3]{\frac{27a^6b^9(a^2+b^2)^{-6}}{8c^{-3}d^6}} = \frac{3a^2b^3(a^2+b^2)^{-2}}{2c^{-1}d^2} = \frac{6a^2b^3c}{d^2(a^2+b^2)^2}$

5) $\sqrt[3]{\frac{8a^3b^{-6}(c-d)^3}{(a^6+b^3)^{-3}}} = \frac{2ab^{-2}(c-d)}{(a^6+b^3)^{-3}} = \frac{2a(c-d)(a^6+b^3)}{b^2}$

6) $\sqrt[3]{2^6 a^9 b^3} \times \frac{(a+b)^3}{a^6} = 4a^3 b \times \frac{(a+b)}{a^2} = \frac{4a^3 b(a+b)}{a^2}$

$= 4ab(a+b)$

§. 78.

Der Cubus einer zweigliedrigen Wurzel $a + b$ besteht:

1) aus dem Cubus des ersten Gliedes $= a^3$;

2) aus dem dreifachen Producte des Quadrates des ersten Gliedes in das zweite Glied $= 3a^2 b$;

3) aus dem dreifachen Producte des ersten Gliedes in das Quadrat des zweiten Gliedes $= 3ab^2$; und

4) aus dem Cubus des zweiten Gliedes $= b^3$.

Den Cubus der Größe $a + b = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$, betrachtet man (wie dies bei Ausziehung der Quadratwurzel mit dem Quadrat $a + b$ geschah) als die Formel, nach welcher die Cubikwurzel aus mehrgliedrigen Größen gezogen wird. Besteht die Wurzel aus mehr als zwei Gliedern, so kann man hier ebenfalls die schon bekannten 2, 3.. $n - 1$ Glieder, und das noch folgende 3te, 4te.. $n$te als das zweite Glied der zu bestimmenden Wurzel ansehen.

Sollte z. B. aus der Größe $27a^6 - 54a^5 b + 63a^4 b^2 - 44a^3 b^3 + 21a^2 b^4 - 6ab^5 + b^6$ die Cubikwurzel gezogen werden, so finden folgende Regeln ihre Anwendung.

1) Man ordne die gegebene Größe nach den auf einander folgenden Potenzen eines Buchstabens so, daß das Glied, wo der Buchstabe in der höchsten Potenz erscheint, das erste wird; — dieses muß jedoch stets ein reiner Cubus seyn.

2) Aus dem ersten Gliede ziehe man die Cubikwurzel nach vorigem §.; sie ist bei unserm Beispiel $= 3a^2$; so hat man das erste Glied der Wurzel, das a der Formel.

3) Diese Wurzel wiederum zum Cubus erhoben und von dem ersten Gliede abgezogen, bringt dasselbe auf Null.

4) Da das folgende Glied den zweiten Theil der Wurzel,

multiplicirt mit dem dreifachen Quadrat des ersten Theils, enthält, so erhebe man den gefundenen ersten Theil zum Quadrat, nehme dies dreifach und dividire mit dieser Größe — hier $27a^4$ — in das zweite Glied — hier in — $54a^5b$ — so erhält man in — $2ab$ den zweiten Theil der Wurzel; diesen mit dem Divisor multiplicirt, und das Product von dem gleichnamigen Gliede — $54a^5b$ abgezogen, bringt auch dieses auf Null.

5) Von den noch vorhandenen Gliedern muß abgezogen werden: das dreifache Product des ersten Theils, multiplicirt mit dem Quadrat des zweiten Theils, hier $3 \times 3a^2 \times (-2ab)^2 = 9a^2 \times 4a^2b^2 = 36a^4b^2$, und der Cubus des zweiten Theils $= -8a^3b^3$; dieses Abziehen läßt hier einen Rest $= 27a^4b^2 - 36a^3b^3$, welcher zeigt: daß die Wurzel (wenn eine rationale statt findet) aus mehr als 3 Gliedern bestehet. Wäre dieselbe rational und nur zweigliedrig, so wäre die Operation beendigt. So aber betrachte man

6) die bereits bekannten Theile der Wurzel $(3a^2 - 2ab)$ als den ersten Theil und verfahre mit denselben genau nach Regel 4 und 5. Eben so würde man verfahren, wenn die Wurzel noch mehr als 3 Glieder enthielte.

Die folgenden 6 Aufgaben, von dem die zweite das hier erläuterte Beispiel ist, machen die Anwendung dieser Regeln anschaulicher.

1) $\sqrt[3]{a^6 - 6a^5b + 12a^4b^2 - 8a^3b^3} = a^2 - 2ab$

$\pm a^6$ (Cubus des ersten Theils)

$\overline{\mp}$

$\cdot \quad -6a^5b : 3a^4$ (dreifaches Quadrat des 1. Theils)

$-6a^5b$ (dreifaches Quadrat des ersten, $\times$ mit dem zweiten Theil)

$\overline{+}$

$\cdot \quad +12a^4b^2$

$+12a^4b^2$ (dreifacher erster Theil, $\times$ mit dem $\square$ des zweit. Theils)

$\overline{-}$

$\cdot \quad -8a^3b^3$

$-8a^3b^3$ (Cubus d. 2. Theils)

$\overline{+}$

2) $\sqrt[3]{27a^6 - 54a^5b + 63a^4b^2 - 44a^3b^3 + 21a^2b^4 - 6ab^5 + b^6} = 3a^2 - 2ab + b^2$

$27a^6$ (Cubus des ersten Theils)

$-54a^5b : 27a^4$ (dreifaches Quadrat des ersten Theils)

$-54a^5b$ (dreifaches Product aus dem Quadrate des ersten Theils in den zweiten)

$+$

$+63a^4b^2 - 44a^3b^3$

$+36a^4b^2 - 8a^3b^3$ (dreifaches Prod. d. 1. Th. in das Quadrat d. 2. Th. und Cubus des 2. Theils)

$+\quad +$

$27a^4b^2 - 36a^3b^3 : 27a^4 - 36a^3b + 12a^2b^2$ (dreif. □ d. 1. Th. $(3a^2-2ab)^2$)

$27a^4b^2 - 36a^3b^3 + 12a^2b^4$ (Prod. aus $3(3a^2-2ab)^2 \times b^2$)

$+\quad +\quad -$

$+9a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$

$+9a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$ (Prod. aus $3(3a^2-2ab) \times b^4$ und Cubus des 2. Theils)

$+\quad -\quad +$

3) $\sqrt[3]{\frac{a^6}{8b^6c^9} + \frac{3a^4d}{4b^4c^6} + \frac{3a^2d^2}{2b^2c^3} + d^3} = \frac{a^2}{2b^2c^3} + d$

4) $\sqrt[3]{a^3 - 3a^2b + \frac{3a^2c}{2} + 3ab^2 - 3abc + \frac{3ac^2}{4} - b^3 + \frac{3b^2c}{2} - \frac{3bc^2}{4} + \frac{c^3}{8}} = a - b + \frac{c}{2}$

5) $\sqrt[3]{\frac{a^3b^3}{c^6x^3} + \frac{3a^2b^4x}{c^4d} - \frac{3a^3b^2}{c^4x^2} + \frac{3ab^5x^5}{c^2d^2} - \frac{6a^2b^3x^2}{c^2d} + \frac{3a^3b}{c^2x} + \frac{b^6x^9}{d^3} - \frac{3ab^4x^6}{d^2} + \frac{3a^2b^2x^3}{d} - a^3} =$
$\frac{ab}{c^2x} + \frac{b^2x^3}{d} - a$

6) $\sqrt[3]{a^{12}b^3c^{-6} - 3a^{10}bc^{-3} + 6a^9b^4c^{-5} + 3a^8b^{-1} - 12a^7b^2c^{-2} + 12a^6b^5c^{-4} - a^6c^3b^{-3} + 6a^5c - 12a^4b^3c^{-1} + 8a^3b^6c^{-3}} = a^4bc^{-2} - a^2cb^{-1} + 2ab^2c^{-1} = \frac{a^4b}{c^2} - \frac{a^2c}{b} + \frac{2ab^2}{c}$

Damit jedoch der Anfänger schon vorläufig zu bestimmen im Stande sey, ob aus einer gegebenen Größe eine rationale $\sqrt[3]{}$ gezogen werden könne oder nicht, beachte derselbe folgendes.

1) Die Größe muß aus $\frac{n(n+1)(n+2)}{1\quad 2\quad 3}$ Gliedern bestehen, wenn die Wurzel n Glieder hat, dabei müssen jedoch wenigstens ebensoviel verschiedene Buchstaben in der Größe vorkommen, als die Wurzel Glieder hat. Hätte aber eine n gliedrige Wurzel nur $n - 1$ verschiedene Buchstaben, so enthielte deren Cubus nur $\frac{n(n+1)(n+2)}{1\quad 2\quad 3} - n$ Glieder, wie die 2te der vorstehenden Aufgaben zeigt.

2) Jeder darinnen vorkommende Buchstabe muß einmal als Cubus, nämlich unter der allgemeinen Form a^{3n} vorkommen.

3) Die Summe der Exponenten eines jeden Gliedes muß durch 3 ohne Rest theilbar seyn.

§. 79.

B) Aus Zahlen.

Jede Cubikwurzel, die größer als 10, kann als ein Binomium von der Form $a + b$ angesehen werden, wenn man sich unter a die Zehner, Hunderte, Tausende ꝛc., unter b aber die

Einer einer beliebigen Zahl vorstellt. Wäre z. B. 75 eine Wurzel, so wäre $a = 70$ und $b = 5$, und der Cubus dieser Größe, mittelst der im vorigen §. gegebenen Formel dargestellt, wäre $= 70^3 + 3 \cdot 70^2 \cdot 5 + 3 \times 70 \cdot 5^2 + 5^3 = 421875 = 75^3$. Man bedient sich daher beim Ausziehen der Cubikwurzel aus größeren Zahlen derselben Formel wie bei Buchstaben, verfährt aber dabei nach folgenden Regeln.

1) Man theile die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Klassen, deren jede 3 Ziffern enthält; die erste Klasse links kann jedoch auch nur aus 2 oder 1 Ziffer bestehen.

2) Aus dieser ersten Klasse ziehe man die Cubikwurzel mittelst der im §. 73 gegebenen Tafel, so hat man in selbiger den ersten Theil der Wurzel — in unserm Beispiel 7 — (s. die erste der folgenden Aufgaben). Dieser erste Theil, das a der Formel, wieder zum Cubus erhoben und von der ersten Klasse abgezogen, läßt einen Rest — hier $= 78$.

3) Zu diesem Reste setze man die erste Ziffer (8) der nächstfolgenden Klasse und dividire diese Größe durch das $3a^2$ der Formel, hier $= 3 \cdot 7 \cdot 7 = 147$, so erhält man in dem Quotienten — hier 5 — den zweiten Theil der Wurzel (das b der Formel). Mit diesem den Divisor multiplicirt und das Product abgezogen, gibt hier $788 - 735 = 53$ zum Rest.

4) Zu diesem Reste setze man die zweite Ziffer derselben Klasse, von der man die erste nahm, herab, so erhält man 537; und von dieser Größe das $3ab^2$, hier $= 3 \times 7 \times 5^2 = 525$, abgezogen, läßt einen Rest $= 12$; zu diesem Reste die noch übrige dritte Ziffer (5) gesetzt und davon den Cubus des gefundenen zweiten Theils (das b^3 der Formel) abgezogen, bringt hier die gegebene Größe auf Null.

5) Hätte die Wurzel mehr als 2 Glieder, so betrachte man die bereits gefundenen Theile derselben als den ersten, und verfahre damit genau nach Regel 3 und 4. Hat der Anfänger einige Fertigkeit erlangt, so kann derselbe, statt jede Ziffer einzeln

herabzusetzen und jede der drei Subtractionen einzeln zu machen, alles auf einmal verrichten, wenn derselbe nur die drei abzuziehenden Theile der Formel so unter einander setzt, daß die letzte Ziffer des $3a^2b$ unter die erste der folgenden Klasse, die letzte des $3ab^2$ unter die zweite und die letzte Ziffer des b^3 unter die dritte Ziffer diese Klasse zu stehen kommt. In unserm Beispiele stände dieses nämlich wie folgt:

$$\begin{array}{rl} & 78|875 \\ 3a^2b = & 735 \\ 3ab^2 = & 525 \\ b^3 = & 125 \\ \hline & - \end{array}$$

Durch folgende 6 Aufgaben wird die Anwendung der gegebenen Regeln gezeigt.

1) $\sqrt[3]{421|875} = 75$

$a^3 = 343$

$788 : 147 = 3a^2$

$735 = 3a^2b$

537

$525 = 3ab^2$

125

$125 = b^3$

2) $\sqrt[3]{220|348|864} = 604$

$a^3 = 216$

$3a^2 = 108 : 4348864$

$3a^2 = 10800 : 43200 = 3a^2b$

$2880 = 3ab^2$

$64 = b^3$

3) $\sqrt[3]{74565301329} = 4209$

4) $\sqrt[3]{732041720703125} = 90125$

5) $\sqrt[3]{533214439029} = 8109$

6) $\sqrt[3]{2203422942875} = 28035$

§. 80.

Bei Ausziehung der Cubikwurzel aus irrationalen Größen oder Brüchen, wird auf ähnliche Art verfahren, wie bei Ausziehung der Quadratwurzel gelehrt ward; nur müssen hier, wenn die $\sqrt[3]{}$ einer Irrationalzahl durch Näherung bestimmt werden soll

stets 3 Nullen zu der Zahl gesetzt werden, wenn die Wurzel um eine Decimalstelle vermehrt werden soll; auch müssen gegebene Decimalbrüche stets $3n$ Stellen enthalten, oder durch Anhängung von Nullen darauf gebracht werden. Eben so muß bei einem gemeinen Bruche der Nenner und Zähler mit dem Quadrate des Nenners multiplicirt werden, damit der letztere rational werde. Auch bei Buchstabenausdrücken, wo die Wurzel nicht rational ausgezogen werden kann, verfährt man nach der in §. 78 gegebenen Formel.

Aufgaben.

1) $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3,000,000,000,000} = 1,442..$

$1 = a^3$

2000 : 3 $(= 3a^2)$
12 $= 3a^2b$
48 $= 3ab^2$
64 $= b^3$

$-$ 1744

256000 : 588 $(= 3a^2)$
2352 $= 3a^2b$
672 $= 3ab^2$
64 $= b^3$

$-$ 241984

14016000 : 62208 $(= 3a^2)$
124416 $= 3ab^2$
1728 $= 3ab^2$
8 $= b^3$

$-$ 12458888

1557112

2) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{6}{8}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2} = \frac{1,81712..}{2} = 0,90856..$

3) $\sqrt[3]{1\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{\frac{5}{4}} = \sqrt[3]{\frac{10}{8}} = \frac{\sqrt[3]{10}}{2} = \frac{2,15443..}{2} = 1,0772..$

4) $\sqrt[3]{0,45} = \sqrt[3]{0,450,000,000,000} = 0,7663..$

5) $\sqrt[3]{1-a} = 1 - \frac{a}{3} - \frac{a^2}{9} - \frac{5a^3}{81} - \frac{10a^4}{243} \ldots$

6) $\sqrt[3]{(a^3+b^3)} = a + \frac{b^3}{3a^2} - \frac{b^6}{9a^5} + \frac{5b^9}{81a^8} - \frac{10b^{12}}{243a^{11}} \ldots$

§. 81.

Wenn man, nach den bereits gegebenen Anweisungen, aus einer Irrationalzahl die Quadrat- oder Cubikwurzel mit einigen Näherungsstellen bereits erhalten hat, so kann man noch einige Stellen der Wurzel mittelst folgenden Verfahrens weit schneller als auf die gewöhnliche Art erhalten.

1) Beim Ausziehen der Quadratwurzel erhebe man die bereits gefundenen Ziffern zum Quadrat und ziehe dieses von der gegebenen Zahl ab, den Rest aber dividire man durch das Doppelte der schon gefundenen Wurzel, so wird man wenigstens noch soviel Stellen richtig erhalten, als deren bereits entwickelt waren.

Nähme man z. B. die dritte Aufgabe des 74. §s., bei der die gefundene Näherungswurzel = 17,1464, und wendete auf selbige die eben gegebenen Regeln an, so wäre: $(17{,}1464)^2 =$ 293,99903296 und 294 — 293,99903296 = 0,00096704. Das Doppelte der gefundenen Wurzel = 34,2928 und 0,00096704 : 34,2928 = 0,00002819 . . . Es wäre demnach $\sqrt{294} = 17{,}14642819$ . .

2) Beim Ausziehen der Cubikwurzel erhebe man die bereits gefundene Wurzel zum Cubus, ziehe diesen von der gegebenen Zahl ab und dividire den erhaltenen Rest durch das dreifache Quadrat der schon gefundenen Wurzel, so wird man in dem Quotienten wenigstens noch soviel Näherungsstellen erhalten, als deren bereits entwickelt waren.

Nähme man z. B. die 3te Aufgabe des vorigen §s., nach welcher die $\sqrt[3]{1\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{1{,}25} = 1{,}0772$ . ., so wäre $1{,}25 - (1{,}0772)^3 = 1{,}25 - 1{,}249939619648 = 0{,}000060380352$.

Das dreifache Quadrat der schon bekannten Wurzel ist $3(1{,}0772)^2 = 3{,}48107952$; mit diesem den obigen Rest dividirt, gibt 0,00001734 . . . zum Quotienten; es wäre also $\sqrt[3]{1{,}25} = 1{,}07721734\ldots$

§. 82.

Ist ein Wurzelexponent, der größer als 3, von der Beschaffenheit, daß derselbe in Factoren, die aus Zweien oder Dreien bestehen, zerfällt werden kann; so kann die Wurzel aus einer solchen Größe mittelst der bereits bekannten Regeln ausgezogen werden. Man zerlegt nämlich einen solchen Exponenten in seine Factoren und zieht aus der Größe soviel mal die Quadratwurzel, als der Factor 2, und soviel mal die Cubikwurzel, als der Factor 3 bei den zerlegten Exponenten erscheint. (Gründet sich auf §. 69).

1) $\sqrt[4]{a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4} = \sqrt{\sqrt{(a^2-2ab+b^2)^2}} = \sqrt{a^2-2ab+b^2} = a-b$

2) $\sqrt[4]{331776} = \sqrt{\sqrt{331776}} = \sqrt{576} = 24$

3) $\sqrt[6]{729-2916a^2+4860a^4-4320a^6+2160a^8-576a^{10}+64a^{12}} = \sqrt[3]{\sqrt{(27-54a^2+36a^4-8a^6)^2}} = \sqrt[3]{27-54a^2+36a^4-8a^6} = 3-2a^2$

4) $\sqrt[12]{} = \sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{1-12a+66a^2-220a^3+495a^4-792a^5+924a^6-792a^7+495a^8-220a^9+66a^{10}-12a^{11}+a^{12}}}} = \sqrt{\sqrt[3]{1-6a+15a^2-20a^3+15a^4-6a^5+a^6}} = \sqrt[3]{1-3a+3a^2+a^3} = 1-a$

Viertes Kapitel.

Rechnungsarten mit Wurzelgrößen.

§. 83.

Allgemeine Erklärungen.

Außer dem, was über diesen Gegenstand bereits im ersten Kapitel dieses Abschnittes gesagt ward, bemerke der Anfänger noch folgendes.

1) Wurzelgrößen stehen auf gleichen Benennungen, wenn die Wurzelexponenten gleich sind; z. B. $4\sqrt{a}$, $-6b\sqrt{c}$, $4a\sqrt{2d}$. Wurzelgrößen mit verschiedenen Exponenten werden auf gleiche Benennungen gebracht, wenn man dieselben als Größen mit gebrochenen Exponenten ansetzt, diese gebrochenen Exponenten, gleich als ob es gemeine Brüche wären, nach §. 3 auf gleiche Nenner bringt, und endlich die Größen, nach §. 70, wieder unter das Wurzelzeichen setzt.

Beispiele.

1) $\begin{cases} \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27} \\ \sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{4^2} = \sqrt[6]{16} \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{10}{30}} = \sqrt[30]{5^{10}} \\ \sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{15}{30}} = \sqrt[30]{7^{15}} \\ \sqrt[5]{6} = 6^{\frac{1}{5}} = 6^{\frac{6}{30}} = \sqrt[30]{6^6} \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt[n]{a^2b^3} = a^{\frac{2}{n}}b^{\frac{3}{n}} = a^{\frac{8m}{4nm}}b^{\frac{12m}{4nm}} = \sqrt[4mn]{a^{8m}b^{12m}} \\ \sqrt[m]{cd^4} = c^{\frac{1}{m}}d^{\frac{4}{m}} = c^{\frac{4n}{4nm}}d^{\frac{16n}{4nm}} = \sqrt[4mn]{c^{4n}d^{16n}} \\ \sqrt[4]{c^2b^m} = c^{\frac{2}{4}}b^{\frac{m}{4}} = c^{\frac{2mn}{4mn}}b^{\frac{m^2n}{4mn}} = \sqrt[4mn]{c^{2mn}b^{m^2n}} \end{cases}$

4) $\begin{cases} a\sqrt[3]{a^2b} = aa^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{8n}{12n}}b^{\frac{4n}{12n}} = a\sqrt[12n]{a^{8n}b^{4n}} \\ b\sqrt[n]{a^2b^4} = ba^{\frac{2}{n}}b^{\frac{4}{n}} = ba^{\frac{24}{12n}}b^{\frac{48}{12n}} = b\sqrt[12n]{a^{24}b^{48}} \\ c\sqrt[4]{a^mb^2} = ca^{\frac{m}{4}}b^{\frac{2}{4}} = ca^{\frac{3mn}{12n}}b^{\frac{6n}{12n}} = c\sqrt[12n]{a^{3mn}b^{6n}} \end{cases}$

2) Wurzelgrößen sind gleichnamig: wenn die Größen unter dem Zeichen und die Wurzelexponenten einander vollkommen gleich sind, die Größen vor dem Zeichen aber gleiche Buchstaben und gleiche Exponenten haben; so sind z. B. $4a\sqrt{b}$ und $3a\sqrt{b}$; $5a^2\sqrt[3]{ab^2}$ und $-3a^2\sqrt[3]{ab^2}$; $7ab^2\sqrt[5]{cb^{-2}}$ und $-6ab^2\sqrt[5]{cb^{-2}}$ gleichnamig.

3) Wurzeln können theilweise rational ausgezogen, oder es können die unter dem Zeichen stehenden Größen zum Theil vor dasselbe gebracht werden, wenn sich die Größen unter dem Zeichen in Factoren zerlegen lassen, von denen wenigstens einer eine vollkommene Potenz des Wurzelexponenten bildet; aus dieser zieht man die Wurzel und setzt selbige als Factor an die Größen vor dem Zeichen. Z. B. $\sqrt{192} = \sqrt{64.3} = 8\sqrt{3}$; $\sqrt[4]{a^6b^5} = \sqrt[4]{a^4a^2b^4b} = ab\sqrt[4]{a^2b}$; $\sqrt[3]{81a^5b^3c^7} = \sqrt[3]{27.a^3 3a^2b^3c^6c} = 3abc^2\sqrt[3]{3a^2c}$; $2\sqrt{(a^2b^2-b^4)} = -2\sqrt{b^2(a^2-b^2)} = 2b\sqrt{(a^2-b^2)}$.

4) Eben so können die Größen, die außerhalb des Wurzelzeichens stehen, unter dasselbe gebracht werden, wenn man diese Größen auf die Potenz des Wurzelexponenten erhebt und mit denselben die Größen unter dem Zeichen multiplicirt; z. B. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$; $6\sqrt{3} = \sqrt{36.3} = \sqrt{108}$; $(a+b)\sqrt{(a-b)} = \sqrt{(a+b)^2(a-b)} = \sqrt{a^3+a^2b-ab^2-b^3}$. Mittelst der unter 3 und 4 gegebenen Anweisungen lassen sich oft ungleichnamige Glieder gleichnamig machen und überhaupt die bei der Addition und Subtraction möglichen Reductionen anbringen. Eben so läßt sich auch die Frage entscheiden: welche von 2 gegebenen Wurzelgrößen die größere sey. So scheinen z. B. die beiden Größen $2ab\sqrt{a^3b^5}$ und $5b^3\sqrt{a^5b}$ ungleichnamig, sie werden aber zu $2ab\sqrt{a^2ab^4b}$ und $5b^3\sqrt{a^4ab} = 2a^2b^3\sqrt{ab}$ und $5a^2b^3\sqrt{ab}$, und beide addirt geben $7a^2b^3\sqrt{ab}$. Eben so scheint $3\sqrt{3}$ größer als

$4\sqrt[3]{3}$ zu seyn, allein es ist: $3\sqrt{3} = \sqrt{3.3^2} = \sqrt{3^3} = \sqrt[6]{3^9}$ $= \sqrt[6]{19683}$ und $4\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{4^3.3} = \sqrt[6]{4^6.3^2} = \sqrt[6]{36864}$. Es wäre ferner $3\sqrt{3a} = \sqrt{27a}$ und $2\sqrt{7a} = \sqrt{28a}$.

§. 84.

Addition und Subtraction der Wurzelgrößen.

Beide Rechnungsarten sind, wie bei der Buchstabenrechnung, mehr eine Reduction; denn nur gleichnamige Glieder können wirklich zu einander addirt oder von einander subtrahirt werden. Mit ungleichnamigen Gliedern aber wird nach §. 28 verfahren.

Aufgaben.

1) $4\sqrt[3]{16} + 5\sqrt[3]{16} + 9\sqrt[3]{54} + 3\sqrt[3]{128} = 4\sqrt[3]{8.2} + 5\sqrt[3]{8.2} + 9\sqrt[3]{27.2} + 3\sqrt[3]{64.2} = 8\sqrt[3]{2} + 10\sqrt[3]{2} + 27\sqrt[3]{2} + 12\sqrt[3]{2} = (8+10+27+12)\sqrt[3]{2} = 57\sqrt[3]{2}$

2) $a\sqrt[m]{b} + c\sqrt[m]{b} - d\sqrt[m]{b} + 2a^2b\sqrt[m]{b} - c\sqrt[m]{b} = (a+c-d+2a^2b-c)\sqrt[m]{b} = (a-d+2a^2b)\sqrt[m]{b}$

3) $7\sqrt{50} - 4\sqrt{32} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{8} - 5\sqrt{18} = 7\sqrt{25.2} - 4\sqrt{16.2} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{4.2} - 5\sqrt{9.2} = 35\sqrt{2} - 16\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 15\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

4) $4\sqrt[3]{16a^4b} - 3\sqrt[3]{2ab^4} + 5\sqrt[3]{54ab} - 7\sqrt[3]{16a^4b^4} + 4\sqrt{2a^3b^3} = 4\sqrt[3]{8a^3.2ab} - 3\sqrt[3]{2abb^3} + 5\sqrt[3]{2.27ab} - 7\sqrt[3]{8a^3b^3.2ab} + 4\sqrt{a^2b^2 2ab} = (8a - 3b + 15 - 14ab)\sqrt[3]{2ab} + 4ab\sqrt{2ab}$

5) $5\sqrt[3]{(8+24\sqrt{3})} + 3\sqrt[3]{(1+\sqrt{27})} - 2\sqrt[3]{(27+81\sqrt{3})} = 5\sqrt[3]{8(1+3\sqrt{3})} + 3\sqrt[3]{(1+\sqrt{9.3})} - 2\sqrt[3]{27(1+3)\sqrt{3}} = 10\sqrt[3]{(1+3\sqrt{3})} + 3\sqrt[3]{(1+3\sqrt{3})} - 6\sqrt[3]{(1+3\sqrt{3})} = 7\sqrt[3]{(1+3\sqrt{3})}$

6) $4a\sqrt[3]{b^2c} - 3b\sqrt[3]{b^5c} + \sqrt[3]{b^2c^4} - 3\sqrt{bc} + 4a\sqrt{b^3c^3} = (4a - 3b^2 + c)\sqrt[3]{b^2c} - (3 - 4abc)\sqrt{bc}$

7) $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)\sqrt{\frac{ac}{a^2-2ab+b^2}}+(a-b)\sqrt{a^3c}=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)\frac{\sqrt{ac}}{a-b}$

$+(a-b)\sqrt{a^2ac}=\frac{1}{a+b}\sqrt{ac}+(a^2-ab)\sqrt{ac}=$

$\frac{(a^3-ab^2+1)\sqrt{ac}}{a+b}$

8) $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}-\sqrt{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^3}=\sqrt{\left(\frac{a-x}{a+x}\right)\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2}$

$-\sqrt{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2}=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}-\frac{a+x}{a-x}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=$

$\left(1-\frac{a+x}{a-x}\right)\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\left(\frac{a-x-(a+x)}{a-x}\right)\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=$

$\frac{-2x}{a-x}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$

Anmerk. Die Multiplication der Größe $\frac{a-x}{a+x}$ mit $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2$ liefert nach §. 35 durch das Aufheben $\frac{a+x}{a-x}$ zum Product; desgl. kann bei $\sqrt{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2}$ die $\sqrt{}$ aus der Größe $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2$ gezogen und vor das Zeichen gesetzt werden, wodurch beide Größen gleichnamig werden.

§. 85.

Multiplication und Division der Wurzelgrößen.

Außer dem, was über algebraische Multiplication und Division bereits in den §. §. 30 und 31, 35 und 36 gesagt ward, beachte man noch folgende Regeln bei der Multiplication der Wurzelgrößen.

1) Man verwandle die unter dem Zeichen stehenden Größen in Größen mit gebrochenen Exponenten, setze selbige als Factoren zu den außerhalb des Zeichens stehenden Größen (§. 70) und multiplicire oder dividire dieselben nach den, in den angezogenen §. §. gegebenen Regeln.

2) Finden sich in dem Producte oder dem Coefficienten noch Buchstaben mit gebrochenen Exponenten, so bringe man diese Brüche auf gleiche Nenner; und setze endlich

3) alle Größen mit ganzen Exponenten vor, alle mit gebrochenen Exponenten unter ein Wurzelzeichen, das zum Wurzelexponenten den gemeinschaftlichen Nenner erhält.

4) Die solchergestalt unter das Zeichen gesetzten Größen erhalten, begreiflich, den Zähler ihres vorherigen Bruchexponenten zum Exponenten.

Aufgaben.

I. Multiplication.

1) $a\sqrt[n]{b} \times c\sqrt[m]{d} = ab^{\frac{1}{n}} \times cd^{\frac{1}{m}} = acb^{\frac{1}{n}}d^{\frac{1}{m}} =$
$acb^{\frac{m}{nm}}d^{\frac{n}{mn}} = ac\sqrt[mn]{b^m d^n}$

2) $4\sqrt[3]{9} \times 2\sqrt[4]{6} = 4 . 9^{\frac{1}{3}} \times 2 . 6^{\frac{1}{4}} = 8 . 9^{\frac{1}{3}} . 6^{\frac{1}{4}} = 8 .$
$9^{\frac{4}{12}} . 6^{\frac{3}{12}} = 8\sqrt[12]{9^4 . 6^3} = 8\sqrt[12]{1417176}$

3) $3\sqrt[4]{9} \times 2\sqrt[3]{6} \times 5\sqrt{3} = 3.9^{\frac{1}{4}} \times 2.6^{\frac{1}{3}} \times 5.3^{\frac{1}{2}} = 30 \times$
$9^{\frac{3}{12}} \times 6^{\frac{4}{12}} \times 3^{\frac{6}{12}} = 30\sqrt[12]{9^3 . 6^4 . 3^6} = 30\sqrt[12]{688747536}$
$= 30\sqrt[12]{3^{12} . 1296} = 90\sqrt[12]{1296}$

4) $a\sqrt[3]{b^2 c^2} \times (a\sqrt{c} - b\sqrt{b}) = ab^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}} \times (ac^{\frac{1}{2}} - bb^{\frac{1}{2}}) =$
$ab^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}} \times (ac^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}) = a^2 b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{7}{6}} - ab^{\frac{1}{6}}c^{\frac{2}{3}} = a^2 b^{\frac{4}{6}}c^{\frac{7}{6}}$
$- ab^{\frac{1}{6}}c^{\frac{4}{6}} = a^2\sqrt[6]{b^4 c^7} - a\sqrt[6]{b^{13}c^4} = a^2\sqrt[6]{b^4 cc^6} -$
$a\sqrt[6]{b^{12}bc^4} = a^2 c\sqrt[6]{b^4 c} - ab^2\sqrt[6]{bc^4}$

5) $(2\sqrt{a} + 4\sqrt{b}) \times (\sqrt{a} - 2\sqrt{b}) = (2a^{\frac{1}{2}} + 4b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} - 2b^{\frac{1}{2}})$
$= 2a - 8b$

6) $(4\sqrt{a+b} - 3\sqrt{a-b}) \times (3\sqrt{a-b} + 4\sqrt{a+b}) =$
$(4(a+b)^{\frac{1}{2}} - 3(a-b)^{\frac{1}{2}}) \times (3(a-b)^{\frac{1}{2}} + 4(a+b)^{\frac{1}{2}}) =$
$16(a+b) - 9(a-b) = 7a + 25b$

II. Division.

1) $p\sqrt[m]{a} : q\sqrt[n]{b} = pa^{\frac{1}{m}} : qb^{\frac{1}{n}} = pa^{\frac{1}{m}}q^{-1}b^{-\frac{1}{n}} =$
$pa^{\frac{n}{mn}}q^{-1}b^{-\frac{m}{mn}} = \frac{p}{q}\sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^m}}$

2) $8\sqrt[3]{16} : 2\sqrt{8} = 8.16^{\frac{1}{3}} : 2.8^{\frac{1}{2}} = 8.16^{\frac{1}{3}}.2^{-1}.8^{-\frac{1}{2}} = 8 \cdot 16^{\frac{2}{6}}.2^{-1}.8^{-\frac{3}{6}} = \frac{8}{2}\sqrt[6]{\frac{16^2}{8^3}} = 4\sqrt[6]{\frac{1}{2}} = 2\sqrt[6]{64}$

3) $2\sqrt{a} : 3\sqrt{b} = 2a^{\frac{1}{2}} : 3b^{\frac{1}{2}} = 2a^{\frac{1}{2}}3^{-1}b^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{a}{b}}$

oder: $\frac{2\sqrt{a}}{3\sqrt{b}} = \frac{2\sqrt{a} \times 3\sqrt{b}}{3\sqrt{b} \times 3\sqrt{b}} = \frac{6\sqrt{ab}}{9\sqrt{b^2}} = \frac{2\sqrt{ab}}{3b}$

4) $\sqrt{x} : (\sqrt{b} + \sqrt{c}) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})}$
$= \frac{\sqrt{xb}-\sqrt{xc}}{\sqrt{b^2}-\sqrt{c^2}} = \frac{\sqrt{xb}-\sqrt{xc}}{b-c}$

5) $\sqrt{a} : (\sqrt{b} - \sqrt{c} + \sqrt{a}) = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a})}$
$= \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}-a}{b-c-a+2\sqrt{ac}} = \frac{(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}-a)(b-a-c-2\sqrt{ac})}{(b-c-a+2\sqrt{ac})(b-c-a-2\sqrt{ac})}$
$= \frac{(b-c-a)\sqrt{ab}+(b-c-a)\sqrt{ac}-2a\sqrt{bc}-2ac}{(b-c-a)^2-4ac}$

Erste Anmerk. Erscheinen lauter Quadratwurzeln im Nenner einer gebrochenen Wurzelgröße, so kann derselbe rational gemacht werden, wenn man Zähler und Nenner mit dem Nenner multiplicirt. Dabei beobachte man jedoch rücksichtlich der Zeichen folgendes. Besteht der Nenner nur aus 1 Gliede, wie im Beispiel 3, so bedarf es keiner Umänderung; besteht derselbe aus 2 Gliedern, wie im Beispiel 4, so muß das Zeichen eines Gliedes in das entgegengesetzte umgewandelt werden; besteht er aber aus 3 Gliedern, so müssen 2 Zeichen geändert werden. Im letzteren Fall wird durch die beschriebene Multiplication erst ein zweigliedriger Nenner erhalten Beispiel 5), den man durch nochmaliges Multipliciren erst rational erhält.

Zweite Anmerk. Wenn zwei unter dem Wurzelzeichen stehende Größen mit den negativen Zeichen versehen sind und der Wurzelexponent wäre ein gerader, so darf in diesem Falle die Multiplication nur angezeigt werden, indem, wenn solche wirklich ausgeführt würde, man durch das erhaltene positive Product zu dem irrigen Schlusse verleitet werden könnte, daß eine mögliche Wurzel statt fände, da doch dieselbe imaginär (§. 68) ist. So würde

z. B. $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{(-a)^2}$ und nicht $= \sqrt{a^2}$;
eben so würde $a\sqrt[2n]{-b} \times c\sqrt[2n]{-d} = ac\sqrt[2n]{-b \times -d}$
und nicht $= ac\sqrt[2n]{bd}$.

§. 86.

Erhebung der Wurzelgrößen zu Potenzen und Ausziehung der Wurzeln aus selbigen.

Wurzelgrößen werden auf Potenzen erhoben, wenn man die Exponenten der Größen, außer und unter dem Zeichen, mit dem Exponenten der Potenz, auf welche die Wurzelgröße erhoben werden soll, multiplicirt; z. B. $(a\sqrt[m]{b})^n = a^n\sqrt[m]{b^n}$ oder $(2\sqrt{3})^4 = 2^4\sqrt{3^4} = 16\sqrt{81} = 16 \times 9 = 144$.

Ist der Exponent der Potenz = dem Exponenten der Wurzel, oder ist der letztere als Factor in ersterem enthalten, so erhebe man nur diese Größe außerhalb des Zeichens auf die verlangte Potenz, und multiplicire solche mit der unter dem Zeichen stehenden Größe, deren Exponent im ersten Falle unverändert bleibt, im letzteren Falle aber noch mit dem Quotient-Exponenten multiplicirt wird, den man durch Division des Exponenten der Potenz, worauf die Größe erhoben werden soll, durch den Wurzelexponenten erhält; z. B. $(a\sqrt[n]{b})^n = a^n b$; $(5\sqrt[3]{2})^3 = 5^3.2 = 250$; $(a\sqrt[m]{b})^{4m} = a^{4m}b^4$; $(4\sqrt[3]{3})^6 = 4^6.3^2 = 36^364$.

Eben so wird, durch umgekehrtes Verfahren, aus einer Wurzelgröße eine andre Wurzel gezogen, wenn man die Größe vor dem Wurzelzeichen unter dasselbe bringt (§. 83), und sodann den Wurzelexponenten mit dem der auszuziehenden Wurzel multiplicirt; z. B. $\sqrt[n]{a\sqrt[m]{b}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^m b}} = \sqrt[nm]{a^m b}$; $\sqrt{3\sqrt[3]{108}} = \sqrt[3]{\sqrt{3^3.108}} = \sqrt[6]{2916} = \sqrt[6]{729 \times 4} = 3\sqrt[6]{4}$.

§. 87.

Stehen zusammengesetzte Potenzen in Klammern, so kann ein Glied außerhalb der Klammern gesetzt werden, wenn man alle Glieder durch diejenige Größe, die man herausschaffen will, dividirt, und diese Größe, auf die Potenz des gemeinschaftlichen Exponenten erhoben, als Factor außerhalb der Klammern setzt; z. B.

$$4(a^m+bc^n)^p = 4\left(\frac{a^m+bc^n}{c^n}\right)^p = 4c^{np}(a^mc^{-n}+b)^p \text{ oder}$$

$$4(7-3a^2)^3 = 4\left(\frac{7-3a^2}{a^2}\right)^3 = 4a^6\left(\frac{7}{a^2}-3\right)^3$$

Eben so kann, durch umgekehrtes Verfahren, eine außerhalb der Klammern als Factor stehende Größe in selbige gebracht werden, wenn man den Exponenten dieses Factors durch den gemeinschaftlichen Exponenten der in den Klammern stehenden Größe dividirt und sodann mit demselben jedes einzelne, in den Klammern stehende Glied multiplicirt; z. B. $x^n(a^m+bx^n)^p = \left(a^m x^{\frac{n}{p}}+bx^n x^{\frac{n}{p}}\right)^p = \left(a^m x^{\frac{n}{p}}+bx^{\frac{np+n}{p}}\right)^p$; $4b^4(a^2+3b^2)^2 = (2a^2b^2+6b^4)^2$; $9a^2b^4(a+b)^2 = (3a^2b^2+3ab^3)^2$

§. 88.

Ausziehung der Quadratwurzel aus einem Binom von der Form:

$$A \pm \sqrt{B}.$$

Setzt man $\sqrt{A} \pm \sqrt{B} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$, so ist $A \pm \sqrt{B} = (\sqrt{x} \pm y)^2 = x \pm 2\sqrt{xy}+y$. Nimmt man ferner an, daß $A = x+y$, so ist $\sqrt{B} = 2\sqrt{xy}$. Reducirt man diese zwei Gleichungen nach §. 40, so folgt: $x = \frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}$ und $y = \frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}$. Diese Werthe für x und y in die ursprüngliche Gleichung gesetzt, geben in $\sqrt{A} \pm \sqrt{B} =$

$\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$ die Formel, nach welcher die folgenden Aufgaben aufgelöst werden können.

Anmerk. Auf den Ausdruck $\sqrt{A \pm B}$ führt nicht nur die Reduction verwickelter quadratischer Gleichungen von der Form $x^4 + Ax^2 = B$, sondern auch die, nach Eülers Methode bewirkte Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Sie ist besonders deßhalb sehr wichtig, weil durch sie (die Formel) der Ausdruck $\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$ oft theilweise rational jedenfalls aber auf eine einfachere Form gebracht wird.

Aufgaben.

1) $\sqrt{69+\sqrt{4752}}$. Hier ist $A = 69$, $B = 4752$; diese Werthe in die Formel gesetzt, gibt solche

$$= \sqrt{\frac{69+\sqrt{69^2-4752}}{2}} + \sqrt{\frac{69-\sqrt{69^2-4752}}{2}} =$$

$$\sqrt{\frac{69+\sqrt{4761-4752}}{2}} + \sqrt{\frac{69-\sqrt{4761-4752}}{2}} =$$

$$\sqrt{\frac{69+\sqrt{9}}{2}} + \sqrt{\frac{69-\sqrt{9}}{2}} = \sqrt{\frac{69+3}{2}} + \sqrt{\frac{69-3}{2}} =$$

$\sqrt{36} + \sqrt{33} = 6 + \sqrt{33}$

2) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{8}$. Hier ist $A = 3$ und $B = 8$; daher $\sqrt{3}-\sqrt{8} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3^2-8}}{2}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{3^2-8}}{2}}$

$= \sqrt{2}-1$

3) $\sqrt{\frac{7}{2}+\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{\frac{7}{2}+\sqrt{\frac{7}{2}^2-6}}{2}} + \sqrt{\frac{\frac{7}{2}-\sqrt{\frac{7}{2}^2-6}}{2}} =$

$\sqrt{3}-\frac{1}{4}$

4) $\sqrt{\sqrt{12}+2\sqrt{3}}$. Hier ist $A = \sqrt{12}$, also $A^2 = 12$, $B = 12$, weil $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$; also $\sqrt{\sqrt{12}+2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{\sqrt{12}+\sqrt{12-12}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{12}-\sqrt{12-12}}{2}} = \sqrt{\sqrt{6}} +$

$\sqrt{\sqrt{6}} = 2\sqrt[4]{6}$

5) $\sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{11-\sqrt{72}} = 3-\sqrt{2}$

6) $\sqrt{4-4\sqrt{3}} = \sqrt{4-\sqrt{48}} = \sqrt{6-\sqrt{-2}}$

7) $\sqrt{3\sqrt{2+4}} = \sqrt{\sqrt{18+4}} = \sqrt{\frac{\sqrt{18+\sqrt{18-16}}}{2}} +$
$\sqrt{\frac{\sqrt{18-\sqrt{18-16}}}{2}} = \sqrt[4]{8+\sqrt[4]{2}}$ (Hier ist nämlich B =
16, weil $4 = \sqrt{16}$)

8) $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}} = \sqrt{a+\sqrt{4(a+1)}} =$
$\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-4(a-1)}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-4(a-1)}}{2}} =$
$2\sqrt{a-1}$

Fünftes Kapitel.

Algebraische Gleichungen des zweiten Grades.

(Reine und verwickelte quadratische Gleichungen.)

§. 89.

Daß der Grad der Gleichung durch den Exponenten der unbekannten Größe bestimmt wird, ward bereits im §. 39 erwähnt. Ist nun der höchste Exponent der unbekannten Größe $= 2$, so heißt die Gleichung eine vom zweiten Grade, oder eine quadratische.

Kommt die unbekannte Größe nur in der zweiten Potenz stehend vor, so heißt die Gleichung eine reine, kommt dieselbe außerdem auch noch in der ersten Potenz stehend vor, so heißt die Gleichung eine verwickelte quadratische. Bei beiden Arten kann entweder nur eine oder es können mehrere unbekannte Größen vorkommen. Es ist nämlich: $ax^2 = b$ eine reine quadratische, und $ax^2 \pm bx = c$ eine verwickelte quadratische Gleichung mit einer unbekannten Größe; und $ax^2 \pm by^2 = c$ eine reine quadratische, und $ax^2 \pm by^2 \pm cx \pm cy = d$ eine verwickelte quadratische Gleichung mit mehreren unbekannten Größen.

Bei jeder quadratischen Gleichung finden, vermöge §. 68 auch 2 Werthe für jede unbekannte Größe statt.

§. 90.

Auflösung reiner quadratischer Gleichungen mit einer unbekannten Größe.

Jede reine quadratische Gleichung läßt sich mittelst der im §. 40 gegebenen Regeln auf die Form $x^2 = A$ bringen; wo A = jeder einfachen oder zusammengesetzten bekannten Größe ist. Man sieht, daß man daraus den Werth von x erhält, wenn man bei beiden Theilen der Gleichung die Quadratwurzel auszieht; es ist nämlich allgemein $x = \pm \sqrt{A}$.

Aufgaben.

1) $x^2 - 4 = 2x^2 - 20$

$x^2 = 16$

$x = \pm \sqrt{16} = \pm 4$

2) $a^2 - 2x^2 = 2ab - 3x^2 - b^2$

$x^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$x = \pm \sqrt{a^2 - 2ab + b^2}$

$x = \pm a - b = a - b$ und $= b - a$

3) $\frac{3x^2}{4} + 3x^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{5x^2}{2} + 4$

$x^2 = 4, \quad x = \pm \sqrt{4} = \pm 2$

§. 91.

Auflösungen reiner quadratischer Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen.

Aus den gegebenen n Gleichungen eliminire man von den n unbekannten Größen $n - 1$, nach einer der, im dritten Kapitel des vorigen Abschnittes angeführten Methoden, so wird man zuletzt eine Gleichung von der Form $x^2 = A$ erhalten, aus welcher der Werth von x nach vorigem §. bestimmt werden kann. Das Verfahren bei der Elimination und die Bestimmung der übrigen unbekannten Größen, versinnlichen folgende Aufgaben.

1) $\begin{cases} 1) & x^2 + y^2 = a \\ 2) & x^2 - y^2 = b \end{cases}$

$2x^2 = a + b$ (durch Addition)

$x^2 = \frac{a+b}{2}$ und $x = \pm\sqrt{\frac{a+b}{2}}$ (Formel)

$x^2 + y^2 = a$
$x^2 - y^2 = b$
$- \quad + \quad =$

$2y^2 = a - b$ (durch Subtraction)

$y^2 = \frac{a-b}{2}$ und $y = \pm\sqrt{\frac{a-b}{2}}$

2) $\begin{cases} 1) & 3ax^2 - 2by^2 = c \\ 2) & 2cx^2 + 2ay^2 = b \end{cases}$

Die erste Gleichung wird durch $\times 2a$ zu

$6a^2x^2 - 4aby^2 = 2ac$

die 2te durch $\times 2b$ zu $4bcx^2 + 4aby^2 = 2b^2$

$(6a^2+4bc)x^2 = 2ac+2b^2$ (durch Addit.)

$x^2 = \frac{2ac+2b^2}{6a^2+4bc} = \frac{ac+b^2}{3a^2+2bc}$ und $x = \pm\sqrt{\frac{ac+b^2}{3a^2+2bc}}$

Die erste Gleichung wird durch $\times 2c =$

$6acx^2 - 4bcy^2 = 2c^2$

die 2te durch $\times 3a = 6acx^2 + 6a^2y^2 = 3ab$

$- \quad - \quad -$

$(-4bc-6a^2)y = -3ab+2c^2$ (durch Subtr.)

$y^2 = \frac{3ab-2c^2}{4bc+6a^2}$ und $y = \pm\sqrt{\frac{3ab-2c^2}{4bc+6a^2}}$

3) $\begin{cases} 1) & 3x^2 + 4y^2 = y^2 + x^2 + 35 \\ 2) & x^2 - y^2 + 5 = 0 \end{cases}$

$x = \pm 2, \quad y = \pm 3$

4) $\begin{cases} 1) & \frac{3ax^2}{b} + 4ay^2 = c \\ 2) & 4bx^2 - 2bz^2 = d \\ 3) & 5ay^2 + 3bz^2 = e \end{cases}$

$x = \pm\sqrt{\frac{b(5c-6d-4e)}{15a-24b^2}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{(10ae-6b^2c+15ad)}{10a(5a-8b^2)}}$

und $z = \pm\sqrt{\frac{20b^2c-15ad-16eb^2}{30ab-48b^3}}$

§. 92.

Auflösungen verwickelter quadratischer Gleichungen mit einer unbekannten Größe.

Jede verwickelte quadratische Gleichung kann mittelst der, im §. 40 gegebenen Regeln auf den Ausdruck $x^2 \pm ax = b$ gebracht werden, bei welchen a und b bekannte Größen sind.

Der erste Theil dieses Ausdrucks wäre ein vollkommenes Quadrat des Binoms $x \pm \frac{a}{2}$, wenn das Quadrat des zweiten Theils, nämlich $\left(\frac{a}{2}\right)^2$, nicht fehlte. Da aber dieser zweite Theil bekannt ist, so kann der fehlende Theil ergänzt werden, wenn man denselben zu beiden Theilen der Gleichung mit dem positiven Zeichen setzt. Der obige Ausdruck verwandelte sich demnach in $x^2 \pm ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b + \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Zieht man auf beiden Theilen die Wurzel, so erhält man

$$x \pm \frac{a}{2} = \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}} \text{ und } x = \mp \frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}.$$

Jede verwickelte quadratische Gleichung kann daher nach folgenden Regeln reducirt werden.

1) Man bringe solche nach §. 40 auf den Ausdruck $x \pm ax = b$, wo a und b einfache oder zusammengesetzte, ganze oder gebrochene, positive oder negative Größen bezeichnen können;

2) addire zu beiden Theilen das Quadrat des halben Coefficienten von x, in obigem Ausdruck $\left(\frac{a}{2}\right)^2$, und ziehe sodann auf beiden Theilen die Wurzel.

3) Der zweite Theil der Wurzel auf der linken Seite des Gleichheitszeichens ist allemal = dem halben Coefficienten von x mit dem Zeichen ($\pm$), das a hat; er ist also $+ \frac{a}{2}$, wenn $+ ax$, und $- \frac{a}{2}$, wenn $- ax$.

4) Ist von den zwei Werthen, die für x bei der verwickelten quadratischen Gleichung sowohl als bei der reinen statt haben, der eine bekannt, so erhält man den andern, wenn man die gegebene Gleichung auf 0 reducirt, den gefundenen Werth mit dem entgegengesetzten Zeichen ($\pm$) zu x setzt und mit dieser Größe, die begreiflich $= 0$, in die reducirte Gleichung dividirt. Wäre z. B. in der Gleichung $6x^2 - 9x - 27 = 0$ ein Werth von $x = 3$, so wäre $(6x^2 - 9x - 27) : (x - 3) = 6x + 9$; und da dieser Quotient ebenfalls $= 0$ seyn muß, so ist $6x = -9$ und $x = -1\frac{1}{2}$ der zweite Werth der obigen Gleichung.

Aufgaben.

1) $x^2 + ax = b$

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b + \frac{a^2}{4}$$

$$x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}} = \frac{-a \pm \sqrt{4b + a^2}}{2}$$ (Formel)

2) $4x^2 - 30 = 7x - 15$

$x = \frac{7}{8} \pm \sqrt{\frac{289}{64}} = 3$ und $= -1\frac{1}{4}$

3) $3ax^2 - 3b + 6a^2 = 4x + 3ab$

$3ax^2 - 4x = 3ab - 6a^2 + 3b$

$$x^2 - \frac{4x}{3a} = \frac{3ab - 6a^2 + 3b}{3a} = \frac{ab - 2a^2 + b}{a}$$

$$x^2 - \frac{4x}{3a} + \left(\frac{2}{3a}\right)^2 = \frac{ab - 2a^2 + b}{a} + \left(\frac{2}{3a}\right)^2$$

$$x - \frac{2}{3a} = \pm\sqrt{\frac{9a^2b - 18a^3 + 9ab + 4}{9a^2}}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{9a^2b - 18a^3 + 9ab + 4}}{3a}$$

4) $abx^2 - acx = dc - dbx$

$$x = -\frac{db + ac}{2ab} \pm \frac{db + ac}{2ab} = \frac{c}{b}$$ und $= -\frac{d}{a}$

5) $\frac{x+7}{x-1} = \frac{24}{x+3}$

$x = 9$ und $= 5$

6) $4x^2 + 3ab^2x = x^3 - 3b^2x + 6a^2b + 6ab + \frac{12a^2}{b^2}$

$$x = -\left(\frac{ab^2+b^2}{2}\right) \pm \sqrt{\frac{a^2b^6+2ab^6+8a^2b^3+8ab^3+b^6+16a^2}{4b^2}}$$

$x = \frac{2a}{b}$ und $= \frac{-ab^3-b^3-2a}{b}$

7) $\frac{x+3}{7} = x^2 - \frac{9x}{4} + \frac{3}{4}$

$x = 2\frac{1}{4}$ und $= \frac{1}{7}$

8) $\frac{x-4}{x+1} + 2x = \frac{2x+1}{2} + 2\frac{3}{9}$

$x = 3\frac{1}{2}$ und $= -2\frac{1}{9}$

9) $\frac{20x-2x^2}{25-3x} - \left(\frac{130-13x}{2}\right) = 2x + 3$

$x = 8$ und $13\frac{2}{3}\frac{2}{1}$

10) $\frac{2a^2-ax}{x} = 3a - \frac{2x}{x+2a} + \frac{2}{5}$

$x = \frac{10a^2}{2-5a}$ und $= \frac{a}{2}$

11) $\frac{4x}{x+\frac{1}{4}} + 1 = 8x - 2$

$x = \frac{3}{4}$ und $= -\frac{1}{8}$

12) $\frac{2x}{7} + \frac{x}{x+0,65} = 3x - 0,6$

$x = 0,35$ und $= -0,41052...$

13) $\frac{a+b}{x} - (a+b) = \frac{x}{a+b} - \frac{(a+b)(a+b)}{x}$

$x = a + b$ und $= -a^2 - 2ab - b^2 - a - b$

Anmerk. Kommen, wie in der letzten Aufgabe, zusammengesetzte Größen als Nenner oder Coefficienten vor, so thut man wohl, wenn man für selbige einen beliebigen Buchstaben substituirt und erst nach beendigter Reduction an dessen Stelle seinen Werth in dem für die unbekannte Größe gefundenen Ausdruck setzt. Bei der

letzten Aufgabe $a + b = p$ gesetzt, gibt $x = -\frac{p^2}{2} \pm \frac{p^2+2p}{2}$ und für p wiederum dessen Werth gesetzt, gibt für x den angegebenen Werth.

§. 93.

Auflösung verwickelter quadratischer Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen.

Auch für diese Gleichungen gelten die in den §. §. 62 bis 64 angeführten Eliminationsmethoden, und die erhaltene Endgleichung wird ebenfalls unter der allgemeinen Form $x^2 \pm ax = b$ erscheinen, und also nach vorigem §. aufgelöst werden können; doch erfordern manche derselben eigene Kunstgriffe, um durch die Elimination nicht auf eine Endgleichung von einem höheren Grade, als dem zweiten, zu gerathen.

Man thut oft wohl (und oft ist es nur hierdurch möglich, eine Endgleichung von der angegebenen Form zu erhalten) eine Combination der unbekannten Größen, wie z. B. die Summen, die Differenzen, die Producte, die Summe der Quadrate u. s. w. statt der unbekannten Größe zu substituiren, diese willkürlich eingesetzte Größe vorläufig zu bestimmen und aus dieser erst den Werth der unbekannten Größe selbst zu entwickeln. Beispiele hierzu liefern die drei letzten Gleichungen und die drei letzten Aufgaben des 96sten §s.

Aufgaben.

1) $\begin{cases} (1)\ x + y = a \\ (2)\ xy = b \end{cases}$

Reduction.

$x^2 + xy = xa$ (durch $\times$ mit x)

$xy = b$

$-\qquad -$

$x^2 - xa = -b$ (durch Subtraction)

$x^2 - ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b$

$x - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \\ \text{und } y = \frac{a \mp \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \end{array}\right\} \text{Formel.}$$

$$2) \begin{cases} 1) \; bx + ay = 5ab \\ 2) \; ax = \frac{6a^2b + 3b}{y} - 1 \end{cases}$$

Reduction.

1) $abxy + a^2y^2 = 5a^2by$ (durch × mit ay)
2) $abxy + by = 6a^2b^2 + 3b^2$ (durch × mit b)

$- \quad - \quad - \quad -$

(durch Subtr.) $a^2y^2 - by = 5a^2by - 6a^2b^2 - 3b^2$ und

$$y = 3b \text{ u. } = \frac{2a^2b + b}{a^2}$$

Diese Werthe in die erste Gleichung gesetzt, gibt solche $bx + \frac{2a^2b + b}{a} = 5ab$, woraus $x = \frac{3a^2 - 1}{a}$ (wenn $y = \frac{2a^2b + b}{a^2}$) und $bx + 3ab = 5ab$, woraus $x = 2a$ (wenn $y = 3b$)

$$3) \begin{cases} 1) \; 4x + 3y = 6y + 7 \\ 2) \; 2xy = 24 \end{cases}$$

$x = 4$ und $= -2\frac{1}{4}$, $y = 3$ und $= -10\frac{2}{3}$

$$4) \begin{cases} 1) \; \frac{a}{x} + by = c \\ 2) \; dx + ey = \frac{g}{x} \end{cases}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{bg + ae - ce}{db}} \text{ u. } y = \frac{c}{b} \pm \sqrt{\frac{a^2db}{b^3 + aeb^2 - ceb^2}}$$

$$5) \begin{cases} 1) \; 3x^2 + \frac{y + 6x}{2} = y^2 - 1\frac{1}{2} \\ 2) \; \frac{y^2 - 6x^2}{6} = x + 2y - 6\frac{1}{2} \end{cases}$$

$x = 1$ und $= -2$, $y = 3$ und $= -14$

$$6) \begin{cases} 1) \; x^2 + y^2 = b \\ 2) \; xy = a \end{cases}$$

Reduction.

Man addire die doppelte zweite Gleichung zu der ersten, und subtrahire dieselbe auch von der ersten, so erhält man:

1) $x^2 + 2xy + y^2 = b + 2a$
2) $x^2 - 2xy + y^2 = b - 2a$

Aus diesen Gleichungen die Wurzel gezogen, gibt:

1) $x + y = \pm\sqrt{b+2a}$
2) $x - y = \pm\sqrt{b-2a}$

(durch Addition) $2x = \pm\sqrt{b+2a} + (\pm\sqrt{b-2a}$ und

$$x = \frac{\pm\sqrt{b+2a} \pm \sqrt{b-2a}}{2}$$

durch Subtr. folgt: $2y = \pm\sqrt{b+2a} - (\pm\sqrt{b-2a})$ und

$$y = \frac{\pm\sqrt{b+2a} \mp \sqrt{b-2a}}{2}$$

7) $\begin{cases} 1) & x^2 - y^2 = b \\ 2) & xy = a \end{cases}$

Reduction.

Aus der zweiten Gleichung folgt $x = \frac{a}{y}$ und $y = \frac{a}{x}$, diese Werthe nach einander in die erste Gleichung gesetzt, geben

$$x = \pm\sqrt{\frac{b \pm \sqrt{4a^2+b^2}}{2}} \text{ und } y =$$

$$\pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{4a^2+b^2}}{2}}$$

8) $\begin{cases} 1) & x^2 + y^2 = x + y + a \\ 2) & xy + x = \frac{a}{2} - y \end{cases}$

Verfährt man hier wie bei der 6ten Aufgabe, so erhält man

1) $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{2a+\frac{1}{4}} + \sqrt{-\frac{3}{2} \pm \sqrt{2a+\frac{1}{4}}}$ und

2) $y = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{2a+\frac{1}{4}} - \sqrt{-\frac{3}{2} \pm \sqrt{2a+\frac{1}{4}}}}{2}$

9) $\begin{cases} 1) & x + y = xy \\ 2) & x + y = x^2 - y^2 \end{cases}$

Reduction.

Man dividire die zweite Gleichung durch ihren gemeinschaftlichen Factor $x + y$; so erhält man $1 = x - y$ und $x =$

$y + 1$. Dieser Werth, in die erste Gleichung gesetzt, gibt $y + 1 + y = y^2 + y$ und $y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Dieser Werth, in die dividirte 2te Gleichung gesetzt, gibt $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

10) $\begin{cases} 1)\ x^2 + y^2 = a - z^2 \\ 2)\ y = \frac{2xz + b}{y} \\ 3)\ cx = dz \end{cases}$

Reduction.

$$\begin{array}{rrrrr} 1) & x^2 & + y^2 & + z^2 = a \\ 2) & & \pm y^2 & = 2xz \pm b \\ & - & - & - \end{array}$$

$$x^2 + z^2 = a - b - 2xz \quad (a)$$

Aus der dritten Gleichung folgt $x = \frac{dz}{c}$. Dieser Werth, in die Gleichung unter a gesetzt, gibt $\frac{d^2 z^2}{c^2} + z^2 = a - b - \frac{2dz^2}{c}$, woraus $z = \pm \frac{c\sqrt{a-b}}{d+c}$. Dieser Werth, in die dritte Gleichung gesetzt, gibt $x = \pm \frac{d\sqrt{a-b}}{d+c}$. Beide Werthe in die 2te Gleich. gesetzt, gibt $y = \pm \frac{\sqrt{2acd + b(d^2+c^2)}}{d+c}$

11) $\begin{cases} 1)\ x^2 + 3y^2 = 51 - 4z \\ 2)\ 5x = 2y + 2x + 6 \\ 3)\ 5y^2 = x + 2y + 23 \end{cases}$

$x = 4$ und $= -\frac{4}{27}$, $y = 3$ und $= -3\frac{2}{9}$ und $z = 2$ und $= 7\frac{1}{9}$

12) $\begin{cases} 1)\ x + y = xy \\ 2)\ x + y = x^2 + y^2 \end{cases}$

Reduction.

Man setze $x = a + b$ und $y = a - b$, so wird $x + y = 2a$, $xy = a^2 - b^2$ und $x^2 + y^2 = 2a^2 + 2b^2$; obige beide Gleichungen wären demnach:

1) $2a = a^2 - b^2$

2) $2a = 2a^2 + b^2$. Hieraus folgt $a = \frac{3}{2}$ und $b = \pm\sqrt{\frac{-3}{4}} = \frac{\pm\sqrt{-3}}{2}$

Es ist also $x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2} = \frac{3+\sqrt{-3}}{2}$ u. $= \frac{3-\sqrt{-3}}{2}$

und $y = \frac{3}{2} - \pm \frac{\sqrt{-3}}{2} = \frac{3-\sqrt{-3}}{2}$ u. $= \frac{3+\sqrt{-3}}{2}$

Alle diese Werthe aber sind imaginär.

13) $\begin{cases} 1) & (x+y)(x^2+y^2) = a \\ 2) & (x-y)(x^2-y^2) = b \end{cases}$

Reduction.

Die zweite Gleichung in ihre Factoren zerfällt, gibt solche:
$(x-y)(x-y)(x+y) = b$ und $(x-y)^2(x+y) = b$ (a)
Man setze $x + y = v$ und $xy = w$, so ist $x^2 + 2xy + y^2$ nämlich das Quadrat von $x + y = v^2$; oder es ist auch $x^2 + 2w + y^2 = v^2$ und $x^2 + y^2 = v^2 - 2w$. Der erste Theil dieser Gleichung würde $= (x-y)^2$, wenn der zum vollkommnen Quadrat noch fehlende Theil $-2xy = -2w$ vorhanden wäre; setzt man denselben beiden Theilen der Gleichung zu, so wird solche zu $x^2 - 2w + y^2 = v^2 - 4w = (x-y)^2$. Diesen Werth in die Gleichung unter a und den von $x^2 + y^2$ in die erste der gegebenen Gleichungen gesetzt, gibt

erstere $= (v^2 - 4w)v = b$ und (b)

letztere $= (v^2 - 2w)v = a$ (c)

Durch Subtr. folgt $2vw = a - b$ und $v = \frac{a-b}{2w}$. Diesen Werth in c gesetzt und gehöriger reducirt, gibt $8w^3 = \frac{(a-b)^3}{a-2b}$, und zieht man die Cubikwurzel, so folgt endlich $w = \frac{a-b}{2\sqrt[3]{a-2b}}$ und $v = \sqrt[3]{2a-b}$. Setzt man für v und w ihre Werthe, so ist $x + y = \sqrt[3]{2a-b}$ und

$$xy = \frac{a-b}{2\sqrt[3]{a-2b}}$$

Diese zwei Gleichungen auf die gewöhnliche Weise behandelt, geben $x = \frac{\sqrt{(2a-b)} \pm \sqrt{b}}{2\sqrt[6]{2a-b}}$ und $y = \frac{\sqrt{2a-b} \mp \sqrt{b}}{2\sqrt[6]{2a-b}}$

14) $\begin{cases} 1) \; x + y + xy = a \\ 2) \; x^2 + y^2 - (x+y) = b \end{cases}$

Reduction.

Setzen wir $x + y = v$, $xy = w$, so ist $x^2 + y^2 = v^2 - 2w$, weil $v^2 = x^2 + 2xy + y^2$; die erste der gegebenen Gleichungen wird also zu $v + w = a$ und die zweite zu $-v^2 - 2w - v = b$. Die erste mit 2 multiplicirt und zu der zweiten addirt, gibt (a) $v^2 + v = 2a + b$. Hieraus folgt $v = \frac{-1 \pm \sqrt{8a+4b+1}}{2}$, und diesen Werth in die erste der transformirten Gleichungen gesetzt, gibt $w = a + \frac{1 \mp \sqrt{8a+4b+1}}{2}$. Setzt man nun für v und w ihre Werthe, so ist $x + y = \frac{-1 \pm \sqrt{8a+4b+1}}{2}$ und $xy = a + \frac{1 \mp \sqrt{8a+4b+1}}{2}$. Hieraus folgt

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{8a+4b+1}}{4} + \sqrt{\frac{3\sqrt{(8a+4b+1)} - 4a + 2b - 3}{8}}$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{8a+4b+1}}{4} - \sqrt{\frac{3\sqrt{(8a+4b+1)} - 4a + 2b - 3}{8}}$$

Anmerk. Der Anfänger wird, bei Bestimmung des Werthes von x u. y bei den Endgleichungen der letzten zwei Aufgaben, wohl thun, wenn er sich der, durch die 1ste Aufgabe entwickelten Formel bedient, vermöge welcher $x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$; das a dieser Formel wird bei der letzten Aufgabe $= a \frac{-1 \pm \sqrt{8a+4b+1}}{2}$ und das b derselben $= a + \frac{1 \mp \sqrt{8a+4b+1}}{2}$ folglich würde $x =$

$$\frac{\frac{-1 \pm \sqrt{8a+4b+1}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1 \pm \sqrt{8a+4b+1}}{2}\right)^2 - 4\left(a + \frac{1 \mp \sqrt{8a+4b+1}}{2}\right)}}{2}$$

woraus durch Reduction der obige Werth erhalten wird.

§. 94.

Alle höhere Gleichungen, die auf die Form $x^{2m} \pm ax^m = b$ gebracht werden können, kann man als verwickelte quadratische Gleichungen ansehen und als solche nach den bisher gegebenen Regeln behandeln. Das, was hierüber noch zu sagen wäre, wird der Anfänger bei den folgenden 6 Aufgaben — von denen die erste als Formel angesehen werden kann — durch einiges Nachdenken ergänzen können.

Aufgaben.

1) $ax^{2m} + bx^m = c$ u. $x^{2m} + \frac{b}{a}x^m = \frac{c}{a}$

$$x^{2m} + \frac{b}{a}x^m + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$x^m + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{4ac+b^2}{4a^2}} \text{ u. } x^m = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{4ac+b^2}{4a^2}}$$

$$x = \sqrt[m]{-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{4ac+b^2}{4a^2}}} = \sqrt[m]{\frac{-b \pm \sqrt{4ac+b^2}}{2a}}$$

Anmerk. Wäre $m > 3$ und ließe sich in keine Factoren, die nur aus Zweien oder Dreien bestehen, zerlegen, so kann der Anfänger nach den bisher gegebenen Anweisungen die $m$te Wurzel nicht ausziehen; deshalb verweise ich denselben auf S. 115.

2) $x^4 + 225 = 34x^2$

$x^2 - 17 = \pm\sqrt{64} = \pm 8$ und $x = \sqrt{17 \pm 8} = 5$ und $= 3$

3) $5x^6 - 80 = 36x^3 - 48$

$x^3 - \frac{18}{5} = \pm\sqrt{\frac{484}{25}} = \pm\frac{22}{5}$ und $x = \sqrt[3]{\frac{18}{5} \pm \frac{22}{5}} = 2$ und $= \sqrt[3]{-\frac{4}{5}}$

4) $2x^8 - 96x^4 = 5346$

$x^4 - 24 = \pm\sqrt{3249} = \pm 57$

$x^2 = \pm\sqrt{81} = \pm 9$ und $x = 3$ und $= \sqrt{-9}$

Außerdem ist auch $x^4 = -33$ und $x^2 = \pm\sqrt{33}$, folglich

$$x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{-33}}$$

5) $2x^4 + a^2 = 2ax^2 + b$

$$x = \pm\sqrt{\frac{a \pm \sqrt{2b - a^2}}{2}}$$

6) $x^4 - bx^2 = a^2$

$$x = \pm\sqrt{\frac{b \pm \sqrt{4a^2 + b^2}}{2}}$$

Viertes Kapitel.

Algebraische Aufgaben, die auf Gleichungen vom zweiten Grade führen.

§. 95.

Aufgaben mit einer unbekannten Größe.

1ste Aufgabe. Multiplicirt man den dritten Theil einer Zahl (x) mit dem vierten Theiler derselben und addirt zu diesem Producte 52, so erhält man gerade 100; welche Zahl ist dies?

Aufl. Den Bedingungen zufolge ist:

$$\frac{x}{3} \times \frac{x}{4} + 52 = 100; \text{ also } x = \pm 24.$$

2te Aufgabe. Das Product zweier Zahlen ist $60 = a$, der Quotient derselben $2\frac{2}{5} = b$; welche Zahlen sind es?

Aufl. Ist die größere Zahl $= x$, so ist die kleinere $= \frac{60}{x} = \frac{a}{x}$ und der Quotient $= x : \frac{a}{x} = \frac{x^2}{a} = b$. Hieraus folgt $x = \pm\sqrt{ab}$; die kleinere Zahl wäre demnach $= \frac{a}{\sqrt{ab}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$. In unserem Beispiele wäre sonach $x = \pm\sqrt{144} = 12$ $=$ der größeren Zahl, und die kleinere wäre $= \sqrt{\frac{60}{2\frac{2}{5}}} = \sqrt{25} = 5$.

3te Aufgabe. Die Summe der Quadrate zweier Zahlen ist $130 = a$, die Differenz dieser Quadrate aber ist $32 = b$; diese Zahlen sind?

Aufl. Die größere Zahl $= \sqrt{\frac{a+b}{2}}$ hier $= 9$, und die kleinere $= \sqrt{\frac{a-b}{2}}$, hier $= 7$.

4te Aufgabe. Auf einem Gehaue standen dreierlei Holzsorten aufgeklaftert, die zusammen 228 Thlr. kosten sollten. Der Preis der einzelnen Klafter jeder Sorte betrug in Thalern soviel als das Sechstheil der Klafterzahl einer jeden Holzsorte; von der

zweiten Sorte aber standen $\frac{1}{4}$ mal mehr Klaftern als von der dritten, und von der ersten Sorte soviel als von den beiden andern Sorten zusammengenommen; wieviel Klaftern waren von jeder Sorte vorhanden? und was war der Preis einer jeden Klafter?

Antw. Von der dritten Sorte sind 12 Klaftern, jede kostete $\frac{1}{12} \times \frac{1}{6} = 2$ Thaler, also alle zwölf 24 Thaler; von der zweiten Sorte sind 18 Klaftern, jede kostete $\frac{1}{18} \times \frac{1}{6} = 3$ Thaler, also alle achtzehn 54 Thaler; von der ersten Sorte sind 30 Klaftern, jede kostete $\frac{1}{30} \times \frac{1}{6} = 5$ Thaler, also alle dreißig 150 Thaler.

5te Aufgabe. Wenn ich den Cubikfuß für soviel Pfennige verkaufe als Cubikfuß sind, antwortete ein Forstbedienter, der um den Preis einer Eiche befragt ward, so kostet diese Eiche gerade 8 Thaler weniger als die vorgeschriebene Taxe; sie würde hingegen 8 Thlr. mehr kosten als die Taxe besagt, wenn ich den Cubikfuß um $1\frac{1}{2}$ mal soviel Pfennige verkaufte als die Eiche Cubikfuß enthält; was war der taxmäßige Preis und wieviel Cubikfuß enthielt die Eiche?

Aufl. Ist die Anzahl der Cubikfuß $= x$, so kostet die Eiche im ersteren Falle $x \times x = x^2$ Pfennige, im letzteren Falle aber $x \times \frac{3x}{2} = \frac{3x^2}{2}$. Da nun 8 Thlr. $= 192$ gr. $= 2304$ pf., so ist $a^2 + 2304 = \frac{3x^2}{2} - 2304$; woraus $x = 96$. Die Eiche hatte also 96 Cubikfuß und der taxmäßige Preis derselben ist 40 Thlr.

6te Aufgabe. Ein Holzmacher bekam soviel Groschen Macherlohn für die Klafter Holz, als er und sein Kammerad wöchentlich Klaftern machten, mußte jedoch von jedem Thlr. seines Verdienstes 1 Groschen in eine, für arme alte Holzmacher bestimmte Kasse abliefern; trotz diesem Abzuge verdienten diese Arbeiter doch wöchentlich 2 Thlr. 13 gr. 4 pf. Wieviel Klaftern fertigten sie wöchentlich? was war das Macherlohn für eine Klafter? und was betrug die wöchentliche Abgabe?

Antw. Sie fertigten wöchentlich 8 Klftrn.; das Macherlohn beträgt pro Klftr. 8 gr., der wöchentliche Verdienst 2 Thlr. 16 gr. und die Abgabe 2 gr. 8 pf.

7te Aufgabe. Das Product zweier Zahlen ist 112 $=$ a, die Summe derselben ist 23 $=$ b; diese Zahlen sind?

Aufl. Die größere Zahl $=$ x gibt die kleinere $=$ $b - x$ und das Product $=$ $bx - x^2$; nun aber ist $bx - x^2 = a$ und $x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a}}{2}$; die größere Zahl ist nämlich $\frac{b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2}$, hier $=$ 16, und die kleinere ist $\frac{b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2}$, hier $=$ 7.

8te Aufgabe. Als man einen Förster um das Alter zweier jungen Eichenbestände befragte, erwiederte derselbe: der ältere war bei meinem Dienstantritt 20 Jahr alt, den jüngeren säete ich in meinem ersten Dienstjahre; wenn ich nun die Zahl Jahre, die das Alter beider Bestände angibt, mit der Zahl meiner Dienstjahre multiplicire, so ist das Product um 780 größer als das Alter beider Bestände zusammen ausmacht; wie alt war jeder dieser Bestände, und wie lange war der Förster im Dienste?

Antw. Der ältere Bestand 36 Jahr, der jüngere und die Dienstzeit des Försters 16 Jahr.

9te Aufgabe. Von drei Eichen hatte die zweite 6 Cubikfuß mehr als die dritte, die erste aber 18 Cbkfß. mehr als die zweite; von der dritten kostete der Cubikfuß halb soviel Pfennige als selbige Cubikfuß enthielt, von der zweiten aber galt der Cubikfuß 2 pf. und von der ersten 4 pf. mehr als von der dritten; alle drei Eichen zusammen aber sollten für 32 Thlr. 15 gr. verkauft werden; wieviel Cubikfuß enthielt jede Eiche? was kostete der Cubikfuß bei jeder? und wie theuer war jede Eiche einzeln?

Aufl. $x\left(\frac{x}{2}\right) + (x+6)\left(\frac{x}{2}+2\right) + (x+24)\left(\frac{x}{2}+4\right)$ $=$ 9396 pf. Hieraus folgt x $=$ 72 $=$ dem Cubikinhalt

der dritten Eiche. Die erste Eiche hatte $72 + 24 = 96$ Cubikfuß, davon galt jeder 3 gr. 4 pf., folglich die ganze Eiche 13 Thlr. 8 gr.; die zweite Eiche hatte $72 + 6 = 78$ Cubikfuß, davon galt jeder 3 gr. 2 pf., folglich die ganze Eiche 10 Thlr. 7 gr.; die dritte Eiche hatte 72 Cubikfuß, davon galt jeder $\frac{72}{2} = 36$ pf. $= 3$ gr., folglich die ganze Eiche 9 Thlr.

10te Aufgabe. Ein Holzhändler hatte x Klaftern für 180 Thlr. erkauft. Einige davon wollte er für seine eigenen Bedürfnisse behalten, an jeder der übrigen Klaftern hingegen wünschte er 1 Thaler zu gewinnen; es fand sich nun, daß wenn er $x - 15$ Klaftern zu demselben Preise verkaufte als der für die erkauften x Klaftern war, sein Wunsch erfüllt ward; was betrug der Verkaufs- und was der Einkaufspreis einer Klafter? und wieviel hatte er Klaftern gekauft?

Antw. 60 Klaftern und der Einkaufspreis einer Klafter war 3 Thlr., der Verkaufpreis aber 4 Thlr.

11te Aufgabe. Das Product zweier Zahlen ist $36 = a$, die Summe ihrer Quadrate aber ist $97 = b$; diese Zahlen sind?

Aufl. Wenn x die eine, $\frac{a}{x}$ die andere Zahl, so ist den Bedingungen zufolge:

$\left(x \times \frac{a}{x}\right) = a$ und $\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) = b$. Hieraus wird

$x^4 + a^2 = bx^2$ und

$$x^2 - \frac{b}{2} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4a^2}{4}}$$

$$x^2 = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4a^2}{4}} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2} \text{ und}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}}, \text{ hier} = \pm \sqrt{\frac{97 \pm 65}{2}} = \pm \sqrt{81} = \pm 9 \text{ und} = \pm \sqrt{16} = \pm 4.$$

(Vergleiche Aufgabe 6 des §s. 93).

Anmerk. Die beiden positiven Werthe 9 unn 4 sind die gesuchten zwei Zahlen; jedoch sind auch dieselben negativ genommen, den Bedingungen der Aufgabe gemäß. Ueberhaupt wird x vier reelle Werthe zulassen: wenn $b^2 > 4a^2$.

12te Aufgabe. Das Product zweier Zahlen ist $24 = a$, die Differenz ihrer Quadrate aber ist $55 = b$; diese Zahlen sind?

Aufl. $x = \pm\sqrt{\frac{b \pm \sqrt{4a^2 + b^2}}{2}}$; hier $= \pm\sqrt{\frac{55 \pm 73}{2}}$ $= \pm\sqrt{64} = \pm 8$ und $= \pm\sqrt{-9}$. Die 2te Zahl wäre $\frac{24}{8} = 3$ oder die Formel der 7ten Aufgabe des §s. 93 angewandt, gäbe $y = \pm\sqrt{\frac{-55 \pm \sqrt{4.24^2 + 55^2}}{2}} = \pm 3$.

Die übrigen 2 Werthe für x u. y sind imaginär, weil $\frac{b}{2} < \sqrt{\frac{4a^2 + b^2}{2}}$

13te Aufgabe. Die Summe zweier Zahlen ist $36 = a$, die Summe ihrer Quadrate $698 = b$; diese Zahlen sind?

Aufl. Ist x die eine Zahl, so ist $a - x$ die andre, daher sind ihre Quadrate x^2 und $a^2 - 2ax + x^2$; nun ist $x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = b$ und $x = \frac{a \pm \sqrt{2b - a^2}}{2}$. Die größere Zahl ist also hier $\frac{36 + \sqrt{1396 - 1296}}{2} = 23$, und die kleinere $\frac{36 - \sqrt{1396 - 1296}}{2} = 13$

14te Aufgabe. Die Summe der Quadrate zweier Zahlen ist $130 = a$, die Summe ihrer Biquadrate aber ist $8962 = b$; diese Zahlen sind?

Aufl. Die eine Zahl $= x$, gibt ihr Quadrat $= x^2$ und ihr Biquadrat $= x^4$; das Quadrat der zweiten Zahl ist $a - x^2$ und ihr Biquadrat $a^2 - 2ax^2 + x^4$. Nun ist $x^4 + a^2 - 2ax + x^4 = b$ und $x = \pm\sqrt{\frac{a \pm \sqrt{2b - a^2}}{2}}$ Die beiden Zahlen sind hier $x = \pm\sqrt{\frac{130 + \sqrt{1024}}{2}} = \pm 9$ und

$x = \pm\sqrt{\frac{130 - \sqrt{1024}}{2}} = \pm 7$

15te Aufgabe. Welche Zahl gibt, multiplicirt mit ihrem vierten Theil und zu diesem Product die Zahl addirt, das Zehnfache dieser Zahl? Antw. Die Zahl 36.

16te Aufgabe. Die Zahl $31 = a$ soll so in 2 Theile zerlegt werden, daß die Summe der Cuben dieser Theile $8587 = b$ ausmacht; diese Theile sind?

Aufl. Gleichung: $x^3 + a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3 = b$, und $x = \frac{3a^2 \pm \sqrt{12ab - 3a^4}}{6a}$. Der eine Theil ist hier $\frac{2883+651}{186} = 19$ und der andre $\frac{2883-651}{186} = 12$.

17te Aufgabe. Welche Zahl gibt, zu ihrer Quadratwurzel addirt, $306 = a$?

Aufl. Ist diese Zahl $= x$, so ist den Bedingungen zufolge $\sqrt{x} + x = a$ und $\sqrt{x} = a - x$, folglich $x = a^2 - 2ax + x^2$ und $x = \frac{2a+1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}$. Hier ist $x = \frac{613+35}{2} = 324$ u. $= \frac{613-35}{2} = 289$, denn es ist

$\sqrt{324} = \pm 18$ und $-18 + 324 = 306$ und

$\sqrt{289} = \pm 17$ und $17 + 289 = 306$.

18te Aufgabe. Unter einige Förster soll eine Summe von 693 Thlrn. vertheilt werden; zwei von ihnen verzichten auf ihren Antheil zu Gunsten ihrer ärmern Collegen, und durch diesen Umstand erhält jeder der übrigen Förster 22 Thlr. mehr als er vorher bekommen hätte. Wieviel Förster waren es, und was erhielt jeder?

Antw. Es waren 9 Förster und jeder der übrigen 7 erhielt 99 Thlr.

19te Aufgabe. An einige Hammerwerke wurden zeither von einem Reviere jährlich $9000 = a$ Klftrn. Holz und Stöcke abgegeben; da alle Werke an diesen Hölzern nicht genug zur Befriedigung ihrer Kohlenbedürfnisse hatten, so wurden $3 = b$

derselben auf andre Reviere verwiesen, und nun bekam jedes der übrigen Werke $500 = c$ Klftrn. mehr als vorher. Wieviel Werke waren vorhanden, und wieviel Klftrn. bekam ein jedes?

Antw. $x = \frac{bc \pm \sqrt{4abc + c^2b^2}}{2c}$. Im Ganzen waren 9 Werke und jedes der übrigen 6 erhielt 1500 Klftrn.

20ste Aufgabe. Zwei Boten gehen zu gleicher Zeit von zwei entgegengesetzten Orten, A und B, ab, und als sie einander begegnen, hat der erste Bote $12 = a$ Meilen mehr als der zweite gemacht, und dabei findet sich, daß, wenn sie mit derselben Geschwindigkeit fort gehen, der erste Bote in $9 = b$ Tagen an dem Orte B und der zweite in $16 = c$ Tagen an dem Orte A eintreffen wird; wie weit sind diese Orte von einander entfernt?

Aufl. Der erste Bote soll x Meilen gemacht haben, als er dem zweiten begegnete, so hatte der zweite $x - a$ Meilen in derselben Zeit gemacht; die Geschwindigkeit, mit der sie gehen, verhält sich also wie $x : x - a$; beide zusammen aber haben $x + x - a = 2x - a$ Meilen, nämlich den ganzen Weg gemacht. Der erste Bote bringt über die $x - a$ Meilen, die er noch zu gehen hat, b Tage zu, er macht also täglich $\frac{x-a}{b}$ Meilen; der zweite bringt über die x Meilen, die er noch zu gehen hat, c Tage zu, er macht also täglich $\frac{x}{c}$ Meilen; ihre Geschwindigkeit verhält sich demnach auch wie $\frac{x-a}{b} : \frac{x}{c}$. Nun aber ist $x : x - a = \frac{x-a}{b} : \frac{x}{c}$ und $x = \frac{a\sqrt{c} + \sqrt{b}}{\sqrt{c} - \sqrt{b}} = \frac{12\sqrt{16} + \sqrt{9}}{\sqrt{16} - \sqrt{9}} = 51$ Meilen hatte der erste und $51 - 12 = 39$ Meilen der zweite Bote gemacht. Die Entfernung der Orte war also $51 + 39 = 90$ Meilen.

21ste Aufgabe. Von zwei Revieren werden zusammen 102 Klftrn. Holz verkauft, und zwar von einem mehr als von dem andern; doch ist der Erlös bei beiden Revieren gleich groß.

Würde dagegen jede Klftr. von dem ersten Reviere zu dem Preise verkauft, welchen eine Klftr. des zweiten Reviers hat, so werden daraus 141 Thlr. 18 gr. gelöst; würde aber jede Klftr. des zweiten Reviers für den Preis verkauft, den eine Klftr. auf dem ersten Reviere hat, so werden nur 112 Thlr. daraus gelöst. Wieviel Klaftern sind von jedem Reviere verkauft worden, und was ist der Preis einer jeden?

Antw. Von dem ersten Reviere wurden 54 Klftrn. à $2\frac{1}{3}$ Thlr., und von dem zweiten 48 Klftrn. à $2\frac{5}{8}$ Thlr. verkauft.

§. 96.

Aufgaben mit mehrern unbekannten Größen.

1ste Aufgabe. Die Summe der Quadrate zweier Zahlen ist $130 = a$, die Differenz dieser Quadrate aber ist $32 = b$; diese Zahlen sind?

Aufl. Die größere Zahl $= x$, die kleinere $= y$, gibt folgende zwei Gleichungen.

$x^2 + y^2 = a$ und $x^2 - y^2 = b$, woraus folgt:

$$x = \sqrt{\frac{a+b}{2}} = \sqrt{\frac{130+32}{2}} = 9 \text{ und}$$

$$y = \sqrt{\frac{a-b}{2}} = \sqrt{\frac{130-32}{2}} = 7.$$

Diese Aufgabe ist bereits unter 3 im vorigen §. aufgelöst; dort ward jedoch nur eine Größe als unbekannt in Rechnung gebracht. Auf ähnliche Art können die Aufgaben 2, 7, 11, 12, 13 und 14 des vorigen §s. bei Annahme zweier unbekannten Größen aufgelöst werden.

2te Aufgabe. Ein Samenhändler verkauft von zwei Sorten Samen nur eine gewisse Anzahl Pfunde, von einer mehr als von der andern, und zwar unter folgenden Bedingungen: er forderte nämlich von dem Käufer soviel Groschen, als das Quadrat der Anzahl Pfunde der ersten Sorte mit $4\frac{1}{2}$ multiplicirt, oder das der zweiten Sorte mit 8 multiplicirt besagte; in beiden Fällen be-

trug das erhaltene Product 27 Thlr. Wieviel Pfund von jeder Sorte waren es? Antw. $x = 12$ und $y = 9$.

3te Aufgabe. Die Summe der Quadrate dreier Zahlen ist $179 = a$, die Differenz, wenn man das erste Quadrat von dem zweiten abzieht, ist $40 = b$, und die, wenn man das zweite von dem dritten abzieht, ist $72 = c$; diese Zahlen sind?

Antw. $$x = \sqrt{\frac{a-2b-c}{3}} = \sqrt{\frac{179-80-72}{3}} = 3$$

$$y = \sqrt{\frac{a+b-c}{3}} = \sqrt{\frac{179+40-72}{3}} = 7$$

$$z = \sqrt{\frac{a+b+2c}{3}} = \sqrt{\frac{179+40+144}{3}} = 11$$

4te Aufgabe. Die Summe der Quadrate dreier Zahlen, x, y und z, ist $141{,}5 = a$; zieht man das Quadrat von y von der Summe der Quadrate der beiden übrigen Zahlen ab, so ist die Differenz $43{,}5 = b$; zieht man aber das Quadrat von z von der Summe der Quadrate der beiden übrigen Zahlen ab, so ist die Differenz $-39 = c$; diese Zahlen sind?

Antw. $$x = \sqrt{\frac{b+c}{2}} = \sqrt{\frac{43{,}5+(-39)}{2}} = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$$

$$y = \sqrt{\frac{a-b}{2}} = \sqrt{\frac{141{,}5-43{,}5}{2}} = \sqrt{49} = 7$$

$$z = \sqrt{\frac{a-c}{2}} = \sqrt{\frac{141{,}5-(-39)}{2}} = \sqrt{90{,}25} = 9{,}5.$$

5te Aufgabe. Ich multiplicirte eine Zahl x mit 4 und eine andre y mit 7, und fand, daß das letztere Product nur um 2 kleiner war als das erstere; multiplicirte ich hingegen beide Zahlen mit einander, so war dieses Product um 22 größer, als das Product von 4x; diese Zahlen sind?

Antw. $x = 11$ oder $= -3\frac{1}{2}$; $y = 6$ oder $= -2\frac{2}{7}$.

6te Aufgabe. Ein Förster, den man nach seinem Diensteinkommen fragte, gab zur Antwort: multiplicire ich meine monatliche Einnahme mit 3 und die wöchentliche (das Jahr

zu 52 Wochen gerechnet) mit 13 und addire diese beiden Producte, so erhalte ich gerade 200 Thlr.; multiplicire ich dagegen die monatliche Einnahme mit der wöchentlichen, so erhalte ich 256 Thlr. 16 gr. Was war das jährliche Einkommen dieses Försters?

Antw. Die monatliche Einnahme $= 33\frac{1}{3}$ und die wöchentliche $= 7\frac{9}{13}$ Thlr., folglich hatte derselbe jährlich 400 Thlr.

7te Aufgabe. Dividirt man die Zahl 60 durch die Anzahl der auf einem Gehaue stehenden Klaftern, so erhält man in dem Quotienten den Preis einer Klftr.; multiplicirt man aber die Klafterzahl mit 3 und den Preis einer Klafter mit 12 und subtrahirt das letztere Product von dem ersteren, so ist die Differenz $=$ dem Quotienten, der durch Division der Zahl 72 mit dem Preise einer Klftr. erhalten wird; wieviel Klaftern standen auf dem Gehaue, und was ist der Preis einer Klafter?

Antw. 20 Klaftern standen auf dem Gehaue und 3 Thlr. ist der Preis einer Klafter.

8te Aufgabe. Bei welchen 2 Zahlen ist die Summe, das Product und die Differenz der Quadrate einander gleich?

Aufl. Die größere Zahl $= x$ die kleinere y, gibt 1) $x+y = xy$ und 2) $x+y = x^2 - y^2$. $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ und $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Siehe die 9te Aufgabe des 93sten §s.)

9te Aufgabe. Bei welchen zwei Zahlen ist die Summe, das Product und die Summe der Quadrate einander gleich?

Aufl. 1) $x + y = xy$ 2) $x + y = x^2 + y^2$ und $x = \frac{3+\sqrt{-3}}{2}$, $y = \frac{3-\sqrt{-3}}{2}$ (s. d. 12te Aufg. d. 93. §s.)

10te Aufgabe. Die Differenz zweier Zahlen von der Differenz ihrer Quadrate subtrahirt, ist $68 = a$; die Summe dieser Zahlen von der Summe ihrer Quadrate subtrahirt, ist $152 = b$; diese Zahlen sind?

Antw. $x = \frac{1 \pm \sqrt{2a+2b}}{2} = 11$ und $= -10$

$y = \frac{1 \pm \sqrt{2b-2a+1}}{2} = 7$ und $= -6$

11te Aufgabe. Wenn bei 3 Eichenbeständen das Alter des 1sten durch das des 2ten und das Alter des 2ten durch das des 3ten dividirt wird, so sind beide Quotienten gleich; das Alter aller drei Bestände hingegen ist 35 Jahr. Multiplicirt man aber ihre Alterjahre in einander, so ist das Product $= 1000$; wie alt ist jeder dieser Bestände?

Aufl. Das Alter des ersten Bestandes $= x$, das des zweiten $= y$ und das des dritten $= z$ gesetzt, gibt $x : y = y : z$ und $z = \frac{y^2}{x}$. Nun ist den Bedingungen zufolge 1) $x + y + \frac{y^2}{x} = 35$ und 2) $x \times y \times \frac{y^2}{x} = 1000$. Hieraus folgt $x = 20$ und $= 5$ und $y = 10$. Nun ist $20 : 10 = 10 : z$, also $z = 5$; es ist aber auch $5 : 10 = 10 : z = 20$. Die 3 Größen ließen sich jedoch auch durch folgende Gleichungen bestimmen: 1) $x + y + z = 35$, 2) $\frac{y}{x} = \frac{z}{y}$ und 3) $xyz = 1000$.

12te Aufgabe. Drei positive Zahlen, x, y und z, sind durch folgende Merkmale von einander verschieden. Das Quadrat der ersten zum Quadrat der zweiten addirt, gibt 74 mehr als das Quadrat der dritten Zahl; hingegen beträgt das Quadrat der zweiten Zahl 47 weniger als das Product der ersten und dritten Zahl; multiplicirt man dagegen die erste Zahl mit 7 und die dritte mit 5, so ist letzteres Product nur um 1 größer als ersteres; diese Zahlen sind?

Antw. $x = 17$, $y = 19$ und $z = 24$.

Bei der Auflösung der folgenden drei Aufgaben ist das, was in §. 93 über die Substitution einer Combination der un-

bekannten Größe in die gebildete Gleichung gesagt ward, zu berücksichtigen.

13te Aufgabe. Ein Förster, den man um sein Alter und um seine Dienstzeit befragte, erwiederte: die Jahre meines Alters mit denen meiner Dienstzeit multiplicirt und die Summe beider zu dem erhaltenen Producte addirt, betragen 368; die Summe der Quadrate beider Jahreszahlen aber übertrifft die Summe beider um 1616; wie alt war dieser Förster? und wie lange diente derselbe?

Aufl. Er soll x Jahre alt seyn und y Jahre dienen, so ist: 1) $x + y + xy = 368$ und 2) $x^2 + y^2 - (x+y) = 1616$. Setzen wir $x + y = v$ und $xy = w$, so ist 3) $v + w = 368$ und 4) $v^2 - 2w - v = 1616$. Hieraus folgt $v = 48$ u. $w = 320$. Da nun $v = x + y = 48$ u. $w = xy = 320$, so folgt $x = 40$ u. $y = 8$. (Vergl. die 14te Aufgabe des 93sten §s.)

14te Aufgabe. Das Alter von vier Fichtenbeständen steht in einer geometrischen Proportion, und zwar ist die Summe der beiden Mittelglieder dieser Proportion um 10 kleiner, als die Summe der beiden äußeren Glieder; diese letztere aber ist wieder um 25 kleiner, als die Summe aller 4 Glieder; die Summe der Quadrate der beiden Mittelglieder aber übertrifft die Summe aller vier Glieder um 265; wie alt ist jeder dieser Bestände?

Aufl. Setzt man das Alter derselben $= v, w, x$ und y, so ist 1) $v : w = x : y$, wird zu $vy = wx$

2) $w + x + 10 = v + y$

3) $v + y + 25 = v + w + x + y$

4) $w^2 + x^2 = v + w + x + y + 265$

Setzen wir $w + x = t$, $v + y = z$ und $vy = q$, so werden die drei letzten der obigen Gleichungen zu

2) $t + 10 = z$

3) $z + 25 = t + z$ und

4) $t^2 - 2q = t + z + 265$

Hieraus folgen $q = 150$, $t = 25$ und $z = 35$. Nun aber ist $q = wx = 150$, $t = w + x = 25$ und $z = v + y = 35$. Daraus folgen wiederum $v = 5$, $w = 10$, $x = 15$, und $5 : 10 = 15 : y$ also $y = 30$.

15te Aufgabe. Die Summe zweier Zahlen ist $7 = a$, die Summe ihrer Biquadrate aber ist $641 = b$; diese Zahlen sind?

Aufl. Man setze die unbekannte Differenz der Zahlen x und $y = d = x - y$, so sind, nach der ersten Aufgabe des 66sten §s., diese beiden Zahlen $\frac{a+d}{2}$ und $\frac{a-d}{2}$; die Summe ihrer Biquadrate aber wäre $\left(\frac{a+d}{2}\right)^4 + \left(\frac{a-d}{2}\right)^4 = b$. Beide Größen zu den angezeigten Potenzen erhoben und gehörig reducirt, gibt $d^4 + 6a^2d^2 = 8b - a^4$. Diese Gleichung nach §. 94 reducirt, gibt $d = \pm\sqrt{-3a^2 \pm \sqrt{8a^4+8b}} = \pm\sqrt{9}$ und $\pm\sqrt{-303}$. Da letztere zwei Werthe hier imaginär sind, so finden für d nur die zwei statt, wo dasselbe $= \pm 3$. Die eine der gesuchten Zahlen ist also $\frac{7+3}{2} = 5$ und die andre $\frac{7-3}{2} = 2$.

§. 97.

Die Zahl Pflanzen zu bestimmen, die bei angegebener Entfernung auf eine gewisse Fläche gepflanzt werden können.

In den mehresten Fällen wird bei dem Holzanbaue entweder nach gleichseitigen Rechtecken oder nach gleichseitigen Dreiecken gepflanzt. Im ersteren Falle stehen auf einer Fläche $= s^2$, im letzteren auf derselben $= \frac{1}{4}s^2\sqrt{3}$ eine gleiche Zahl Pflanzen, wenn nämlich $s =$ der Entfernung einer Pflanze von der nächst daran stehenden ist.

Bezeichnete nun Q den auf gleiche Einheiten *) mit s gebrachten gegebenen Flächeninhalt, z. B. den eines Ackers, so wäre $\frac{Q}{s^2} = n$ die Zahl Pflanzen, wenn selbige in gleichseitige Rechtecke, und $\frac{Q}{\frac{1}{2}s^2\sqrt{3}} = \frac{2Q}{s^2\sqrt{3}} = \frac{2Q}{s^2 1{,}732051..} = n'$ die Zahl der Pflanzen, wenn sie nach gleichseitigen Dreiecken verpflanzt würden.

Sollte die Pflanzung nach gleichschenklichen Dreiecken geschehen und die gleichen Schenkel würden von der Länge angenommen, daß 4 dergleichen, mit der Spitze zusammenstehende Dreiecke eine Fläche s^2 einnähmen, nämlich ein Quadrat bildeten (⁘), dessen Seite s = der dritten größeren Seite des gleichschenklichen Dreiecks wäre, so gingen begreiflich in diesem Falle 5 Pflanzen auf dieselbe Fläche, auf welche oben nur 4 gingen; die Zahl Pflanzen n'' würde sich also zu der n verhalten wie 5 : 4; es wäre nämlich $n'' = \frac{5Q}{4s^2}$.

1ste Aufgabe. Wieviel Pflanzen gehen auf einen sächsis. Acker, wenn solche 4 Duodecimalfuß von einander entfernt nach gleichseitigen Rechtecken verpflanzt werden?

Aufl. Der sächs. Acker = 300 □Ruth., die Ruthe Längenmaß = $15\frac{1}{6}$ Fuß, folglich die □Ruthe = $15\frac{1}{6} \times 15\frac{1}{6} = \frac{8281}{36}$ und der Acker = $\frac{8281}{36} \times 300 = \frac{207025}{3}$ Duodecimal-Quadratfuß = Q. Da nun $s = 4$, so ist $n = \frac{207025}{3} : 16 = 4313\frac{1}{48}$ Pflanze.

2te Aufgabe. Wieviel Pflanzen gehen auf einen dergl. Acker, wenn solche in $4\frac{1}{2}$ Duodecimalfuß weiter Entfernung nach gleichseitigen Dreiecken verpflanzt werden?

*) Nämlich auf Quadrat- Decimal- oder Duodecimalfuß, je nachdem s in Decimal- oder Duodecimal-Längenfuß gegeben ist.

Aufl. Da $s = 4\frac{1}{2}$, so ist $s^2 = \frac{81}{4}$, folglich $n' = (2 \times \frac{207025}{3}) : (\frac{81}{4} \times 1{,}732051..) = \frac{414050}{3} : \frac{140/296131..}{4}$ $= 3935{,}0..$ Pflanzen.

3te Aufgabe. Wieviel Pflanzen gehen auf einen dergl. Acker, wenn nach gleichschenklichen Dreiecken, nach dem oben ausgesprochenen Maße gepflanzt wird und die längere Seite des Dreiecks $= 5$ Duodecimalfuß ist?

Aufl. Da hier $s = 5$, so ist $s^2 = 25$, folglich $n'' = (5 \times \frac{207025}{3}) : (4 \times 25) = \frac{1035125}{3} : 100 = 3450{,}0$ Pfl.

4te Aufgabe. Wieviel Pflanzen gehen auf $3\frac{1}{2}$ preußische Morgen, wenn solche bei 5 Fuß weiter Entfernung nach gleichseitigen Dreiecken verpflanzt werden?

Aufl. Der preuß. Morgen $= 25920$ Quadratfuß, also $\frac{2 \times 25920}{25 \times 1{,}732..} \times 3\frac{1}{2} = 4190$ Pflanzen.

Sechster Abschnitt.

Combinationslehre.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Erklärungen.

§. 98.

Unter der Combinationslehre, im engeren Sinne, versteht man die Lehre von der Verbindung (eigentlichen Combination), Versetzung (Permutation) und verschiedenartigen Zusammensetzung (Variation) einer gewissen Anzahl Dinge. Im weiteren Sinne genommen, umfaßt diese Lehre hingegen alle Gegenstände, bei denen es auf eine Anordnung nach bestimmten Gesetzen ankommt.

Mittelst der Combinationslehre werden nicht nur mehrere Probleme der Mathematik gelöst, sondern sie leistet besondern Nutzen bei der Entwickelung mancher Formeln; z. B. der in §. 64 angegebenen, bei Bestimmung des Gesetzes, nach welcher die auf einander folgenden Potenzen einer zwei- oder mehrnamigen Größe steigen (s. den folgenden Abschnitt), und vorzüglich bei der Analysis.

Die Combinationslehre zerfällt:

a) in die Lehre von den Combinationen — Verbindungen;

b) in die Lehre von den Permutationen — Versetzungen u.

c) in die Lehre von den Variationen — verschiedenartigen Zusammensetzungen.

Anmerk. Vollständige Werke über die Combinationslehre sind: 1) Weingärtners Lehrbuch der combinatorischen Analysis, nach Hindenbergs Theorie. Leipzig, 1801. 2) Fischer und Krauße Lehrbuch der Combinationslehre ꝛc. Dresden, 1812. 3) Stahls Grundriß der Combinationslehre nebst Anwendung derselben auf die Analysis. Leipzig, 1800. 4) Lehrbegriffe der Syntactik oder Combinationslehre von Lorenz. Leipzig, 1806.

§. 99.

A) Von den Combinationen.

Combiniren heißt eine beliebige Menge von m Dingen (Elementen) so verbinden, daß daraus alle nur mögliche Verbindungen zu je n dieser Dinge entstehen. Wäre z. B. $m=5$ und $n=4$ gegeben, und man dächte sich unter den 5 Elementen die ersten 5 Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets; so hieße die obige Erklärung: man soll von diesen 5 Buchstaben je 4 auf alle nur mögliche Weise zusammenstellen — verbinden. (Siehe Tafel I.) Diese Verbindungen zu je n kann auf zweierlei Art geschehen. Es kann nämlich

1) derselbe Buchstabe zwar mit sich selbst verbunden vorkommen, aber nicht mit einem Buchstaben, mit welchem derselbe schon einmal verbunden war; daß z. B. nicht a mit $b = ab$ und dann b mit $a = ba$ verbunden würde.

Anmerk. Denn ab und ba sind nicht zwei, sondern eine und dieselbe Combination der beiden Elemente a und b; wäre z. B. $a=2$, $b=5$, so wäre $ab=ba=10$.

2) keiner der gegebenen Buchstaben weder mit sich selbst, noch mit einem andern Buchstaben zum zweitenmale verbunden werden.

Ersteres werden Combinationen mit, letzteres Combinationen ohne Wiederholugen genannt.

Um den Unterschied derselben mehr zu versinnlichen, stehen

hier die 5 ersten Buchstaben des Alphabets zu je zweien verbunden, und zwar bei A mit, bei B ohne Wiederholungen.

A	B
aa	*ab*
ab	*ac*
ac	*ad*
ad	*ae*
ae	*bc*
bb	*bd*
bc	*be*
bd	*cd*
be	*ce*
cc	*de*
cd	
ce	
dd	
de	
ee	

§. 100.

Wenn wir die Anzahl der Elemente (der Buchstaben) $= m$ und die Zahl der Elemente, die von diesen m mit einander verbunden werden sollen, $= n$ setzen, so ist, um zu bestimmen, wieviel solcher Combinationen möglich sind, die allgemeine Formel:

1) für Combinationen mit Wiederholungen $=$

$$\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)\ldots\ldots(m+n-1)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots\ldots \times n}$$ und

2) für Combinationen ohne Wiederholungen $=$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-n+1)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots \times n}$$. Dabei kann

1) bei Combinationen mit Wiederholungen $n = m$ oder $n > m$ seyn; (Siehe Tabelle II.)

2) bei Combinationen ohne Wiederholungen n niemals $= m$ seyn, sonst fände nur eine Combination statt, sondern es muß stets $n < m$ seyn.

Sollen, bei der zweiten Art, aus m Elementen Combinationen zu je n gebildet werden und sodann welche zu je $m-n$, so nämlich, daß die Anzahl der Elemente einer Combination zu

der Anzahl der Elemente einer der andern Combinationen addirt, = den gegebenen Elementen, daß nämlich $n+(m-n)=m$; so ist die Anzahl dieser Verbindungen bei beiden gleich groß. Sollten z. B. aus 5 Buchstaben *abcde* erst Combinationen zu je drei und dann welche zu je $5-3=2$ gebildet werden, so wäre die Anzahl beider gleich groß; es ist nämlich

$$\frac{5\times4\times3}{1\times2\times3} = 10 \text{ u. } \frac{5\times4}{1\times2} = 10.$$

§. 101.

B) Von den Permutationen.

Permutiren heißt eine beliebige Menge von m Dingen (z. B. 4, 5, 6... Buchstaben) so versetzen: daß durch dieses Versetzen Verbindungen hervorgehen, wobei jeder derselben zwar alle m Dinge vorhanden seyn müssen, doch so, daß wenigstens eins eine andre Stelle einnimmt, als die in den vorigen Verbindungen war. Sollten z. B. aus den drei Buchstaben *a*, *b* und *c* alle mögliche Permutationen gebildet werden, so wären dies folgende sechs: *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab* und *cba*. Diese Permutationen nennt man auch Formen.

Die Anzahl dieser Formen ist von m Dingen

$$= m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\ldots\ldots(m-m+1).$$

In dem obigen Beispiel war $m=3$, also die Zahl der möglichen Formeu $= 3\times2\times1 = 6$.

Kommt zu $m-1$ Dingen noch eins hinzu, so wird dasselbe bei den Versetzungen mit den schon vorhandenen Formen (die wir Grundformen nennen wollen), in jeder soviel mal versetzt werden können, als nun Dinge vorhanden sind, nämlich m mal. Käme bei dem oben gebrauchten Beispiel noch der Buchstabe *d* dazu, so würde dieses *d* in jede der vorhandenen 6 Grundformen 4 mal gesetzt werden können; es würde nämlich die 1ste, 2te, 3te und letzte Stelle in jeder einnehmen

können. Das neu hinzugekommene Ding, nämlich das d in unserm Beispiele, wird sovielmal den 1sten, sovielmal den 2ten, 3ten.. $m-1$ten und $m$ten Platz einnehmen, als Grundformen vorhanden waren, ehe es hinzu kam, nämlich $(m-1)(m-2)\ldots 1)$ hier $= 6$ mal.

Aus den bisherigen Betrachtungen fließt die Antwort auf folgende 3 Fragen.

1) Wie groß ist die Anzahl der Formen bei m permutablen Dingen? Antw. $m(m-1)(m-2)\ldots.(m-m+1)$.

2) Wievielmal kann jedes neue permutable Ding, das zu $m-1$ schon vorhandenen Dingen hinzukommt, in jede der vorhandenen Grundformen gesetzt werden? Antw. m mal.

3) Wievielmal nimmt dasselbe bei diesen Grundformen die 1ste, wievielmal die 2te ... und wievielmal die $m$te Strlle ein?

Antw. $(m-1)(m-2)(m-3)\ldots.(m-m+1)$ mal.

Um die Beantwortung dieser 3 Fragen durch ein Beispiel zu erläutern, nehme man an, es wären $m-1=4$ Buchstaben a, b, c und d vorhanden; diese bildeten nach Formel 1, $4\times3\times2\times1 = 24$ Formen. Zu diesen käme nun der 5te Buchstabe e, so wären $5\times4\times3\times2\times1 = 120$ Formen möglich. Der Buchstabe e aber würde in jeder der vorhandenen 24 Grundformen $m=5$mal gesetzt werden können; er würde also $4\times3\times2\times1 = 24$ mal die 1ste, 24 mal die 2te, 24 mal die 3te, 24 mal die 4te und 24 mal die 5te Stelle einnehmen. (Siehe Tabelle V.)

§. 102.

Im vorigen §. wurden die zum Permutiren gegebenen m Dinge als von einander verschieden angesehen; wenn wir jedoch annehmen, daß unter diesen m Dingen sich einige gleiche fiuden, daß z. B. der Buchstabe a, n mal, der Buchstabe b, p mal, der Buchstabe c, q mal u. s. w. vorkäme, so wäre:

1) die Anzahl aller möglichen Permutationen oder Formen:

a) wenn sich darunter n gleiche Dinge befänden, =

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-m+1)}{n(n-1)(n-2)\ldots 2\times 1}$$

b) wenn sich n gleiche und p gleiche Dinge fänden, =

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-m+1)}{[n(n-1)(n-2)\ldots\times 2\times 1][p(p-1)(p-2)\ldots 2\times 1]}$$

c) wenn sich n gleiche, p gleiche und q gleiche Dinge fänden (so daß z. B. $n+p+q = m$ seyn könnte), =

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-m+1)}{[n(n-1)(n-2)\ldots 2\times 1][p(p-1)(p-2)\ldots\times 2\times 1][q(q-1)(q-2)\ldots\times 2\times 1]}$$

2) Jeder zu $m-1$ Buchstaben, unter welchen sich n gleiche, oder n und p, oder n, p und q gleiche befänden, neu hinzu kommende Buchstabe, würde einen bestimmten Platz einnehmen:

a) wenn n gleiche Buchstaben vorhanden, =

$$\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-m+1)}{n(n-1)(n-2)\ldots 2\times 1}$$

b) wenn n und p gleiche Buchstaben vorhanden, =

$$\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-m+1)}{[n(n-1)(n-2)\ldots\times 2\times 1][p(p-1)(p-2)\ldots\times 2\times 1]}$$

c) wenn n, p und q gleiche Buchstaben vorhanden, =

$$\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-m+1)}{[n(n-1)(n-2)\ldots\times 2\times 1][p(p-1)(p-2)\ldots\times 2\times 1][q(q-1)(q-2)\ldots\times 2\times 1]}$$

Wären bei m, z. B. bei 6 Buchstaben, $2 = n$ mal a; $3 = p$ mal b und $1 = q$ mal c, so wäre die Zahl der möglichen Formen $= \frac{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{2\times 1\times 3\times 2\times 1} = 60$. Dazu soll noch der Buchstabe d kommen, so wären $\frac{7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{2\times 1\times 3\times 2\times 1} = 420$ Formen möglich; der neu hinzugekommene Buchstabe aber würde $\frac{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{2\times 1\times 3\times 2\times 1} = 60$

mal ein gewisse Stelle, z. B. die 2te in den 420 gebildeten Formen einnehmen, eben so das nur einmal vorhandene c; dagegen würde das $n =$ zweimal vorhandene a, $60 \times n = 60 \times 2 = 120$; das $p = 3$ mal vorhandene b, $60 \times p = 60 \times 3 = 180$ mal eine gewisse Stelle einnehmen.

§. 103.

C) Von den Variationen.

Unter Variiren versteht man das Bilden aller möglichen, doch verschiedenartigen Zusammensetzungen zu je n von m gegebenen Elementen (Buchstaben).

Zwei gegebene Dinge, a und b, erlauben nur die zwei Zusammensetzungen (Variationen) ab und ba, wenn das eine Element (a oder b) nicht zu sich selbst gesetzt werden darf; — Variationen ohne Wiederholungen. Kann aber jedes Element mit sich selbst eine Zusammensetzung bilden, so lassen obige zwei Dinge 4 Variationen zu, nämlich aa, ab, ba, bb; — Variationen mit Wiederholungen.

Die Anzahl der Variationen, die von m Elementen zu je n gebildet werden können, ist:

1) wenn Wiederholungen statt finden können, $= m^n$ und

2) wenn keine Wiederholungen statt finden dürfen, $= m(m-1)(m-2) \ldots (m-n+1)$.

Anmerk. Da, wie der aufmerksame Leser einsiehet, alle 3 Abtheilungen der Combinationslehre unter sich viel Aehnliches haben, so steht eine kurze Wiederholung der Kriterien derselben, hier wohl nicht am unrechten Orte. Die Combinationen sind Verbindungen zu je n von m gegebenen Buchstaben, bei denen zwar der nämliche Buchstabe mit sich selbst verbunden vorkommen kann, nicht aber a einmal mit b als ab und wiederum mit a als ba; durch letzteren Umstand sind dieselben von den Variationen verschieden, bei welchen es Bedingung ist, daß ab und ba vorkommen müssen. Bei beiden kann n kleiner als m seyn; bei Combinationen und Variationen mit Wiederholungen kann jedoch

auch $n = m$ oder größer als m seyn; d. h. die Anzahl der Buchstaben die eine Verbindung (Combination) oder verschiedenartige Zusammensetzung (Variation) bilden, kann geringer, oder gleich oder größer, als die Anzahl aller gegebenen Buchstaben seyn; dadurch sind beidevon den Permutationen unterschieden, bei welchen jede Form stets m Elemente enthält. Eben so können bei den Permutationen unter den, zum Permutiren gegebenen Elementen n, oder n und p, oder n, p und q gleiche seyn, nicht aber bei den Combinationen oder Variationen. Daß übrigens, wenn bei den Permutationen alle Elemente verschieden und bei den Variationen $n = m$ ist, die Anzahl der Permutationen = der Anzahl der Variationen ohne Wiederholungen ist, erhellet aus den gegebenen Formeln.

Zweites Kapitel.

Darstellung der Combinationen, Variationen und Permutationen.

§. 104.

Bildung der Combinationen mit und ohne Wiederholung.

(Vergleiche die Tafeln I. bis IV.)

Eine Klasse nenne ich diejenige Anzahl von Combinationen, die alle mit ein und demselben Elemente anfangen, z. B. die, wo der Buchstabe *a* die erste Stelle einnimmt, bilden die Klasse der *a*.

Jede Klasse zerfälle ich wiederum in Ordnungen und benenne dieselben nach dem Buchstaben, der die zweite Stelle einnimmt; wäre dieser Buchstabe, z. B. *b*, bei der Klasse *c*, so wäre dies die Ordnung der *b* in der Klasse der *c*. Die Combinationen jeder Ordnung haben sonach zwei Buchstaben mit einander gemein.

Ist $n > 4$, so müssen bei Darstellung der Combinationen noch Unterordnungen angenommen werden, die nach dem Buchstaben, der die dritte Stelle einnimmt, benannt werden; wäre dieser Buchstabe z. B. *a*, so würde dieses die Unterordnung der *a*. Die Combinationen jeder Unterordnung haben also drei Buchstaben mit einander gemein.

Die Aufeinanderfolge der Klassen und Ordnungen ist die alphabetische und bestimmt sich nach den gegebenen Buchstaben. Wären z. B. $a, b, c, d, e \ldots$ gegeben, so wäre die Klasse der a die erste, die der b die zweite, die der c die dritte u. s. w.; dasselbe gilt auch von den Ordnungen und Unterordnungen.

Die Anzahl der Klassen bei Combinationen ohne Wiederholungen ist $= m - n + 1$; bei Combinationen mit Wiederholungen aber ist dieselbe $= m$. Die Zahl der Ordnungen der ersteren Klasse ist dabei $=$ der Anzahl der Klassen; jede folgende Klasse hat stets eine Ordnung weniger als die vorhergehende Klasse. Die letzte Klasse hat nur eine Ordnung, und diese nur eine Combination.

Die Zahl der Unterordnungen ist in der ersten Ordnung $=$ der Zahl der Ordnungen $=$ der Zahl der Klassen; jede folgende Ordnung hat stets eine Unterordnung weniger als deren die vorhergehende hatte, so daß die letzte Ordnung nur eine Unterordnung, und diese nur eine Combination enthält.

Jede erste Klasse hat

1) bei Combinationen mit Wiederholungen

$$\frac{n(n+1)(n+2) \ldots\ldots (n+m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \times (m-1)}$$ Combinationen

2) bei Combinationen ohne Wiederholungen

$$\frac{n(n+1)(n+2) \ldots\ldots (m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-n)}$$ Combinationen.

In diesen Formeln ist, wie im §. 100, $m =$ der Zahl der gegebenen Elemente und $n =$ der Zahl der Elemente, woraus eine Combination bestehet. Jede erste Ordnung, Unterordnung ꝛc. enthält soviel Combinationen, als die eben für die erste Klasse gegebene Formel besagt; nur wird in dieser Formel $n =$ der Zahl der Elemente, die eine Combination der Ordnung ꝛc.

enthält, den Charakterbuchstaben als das 1ste Element gezählt. Hätte also die Combination der Klasse 5, so hätte die der Ordnung 4, die der Unterordnung 3 ꝛc. Elemente.

Bei jeder folgenden Klasse, Ordnung ꝛc. wird aber, mit Beibehaltung des eben bestimmten Werthes von n, immer ein Glied weniger von der für die 1ste Klasse gegebenen Formel entwickelt; bestände z. B. die zu entwickelnde Formel bei der ersten Klasse aus folgenden 3 Gliedern: $\frac{5\times6\times7}{1\times2\times3}$, so hätte die Formel der 2ten Klasse nur die 2 Glieder $\frac{5\times6}{1\times2}$ und die der 3ten Klasse nur das Glied $\frac{5}{1}$. Die gegebenen Formeln, angewandt auf ein besonderes Beispiel, bei dem die $8 = m$ Buchstaben a, b, c, d, e, f, g und h zum Combiniren ohne Wiederholungen und zwar zu je $5 = n$ gegeben sind, wird das eben Gelehrte noch mehr versinnlichen.

Die Anzahl der Combinationen wäre, nach §. 100, $\frac{8\times7\times6\times5\times4}{1\times2\times3\times4\times5} = 56$. (Vergl. Tab. IV. während der folgenden Beschreibung.)

Man erhielte dabei $m - n + 1 = 8 - 5 + 1 = 4$ Klassen. Davon hätte die Klasse der a, als die erste, 4, die Klasse der b, als die zweite, 3, die Klasse der c, als die dritte, 2, und die Klasse der d nur eine Ordnung.

Die erste Klasse aber enthielt $\frac{5\times6\times7}{1\times2\times3} = 35$, die zweite Klasse $\frac{5\times6}{1\times2} = 15$, die dritte Klasse $\frac{5}{1} = 5$ Combinationen, und die letzte Klasse, so wie die letzte Ordnung, bekanntlich nur eine Combination.

Combinationen

mit Wiederholungen zu je 4 von den 5 gegebenen Elementen a, b, c, d, e; ihre Anzahl $= \frac{5\times6\times7\times8}{1\times2\times3\times4} = 70.$

I. Klasse der a		II. Klasse der b	
—		bbbb	
aaaa		bbbc	
aaab		bbbd	
aaac		bbbe	
aaad		bbcc	1. Ordnung der b.
aabb	1. Ordnung der a.	bbcd	
aabc		bbce	
aabd		bbdd	
aabe		bbde	
aacc		bbee	
aacd		bccc	
aace		bccd	
aadd		bcce	2. Ordnung der c.
aade		bcdd	
aaee		bcde	
abbb		bcee	
abbc		bddd	3. Ordnung der d.
abbd		bdde	
abbe		bdee	
abcc	2. Ordnung der b.	beee	4. O. d. e
abcd		III. Klasse der c.	
abce		cccc	
abdd		cccd	
abde		ccce	1. Ordnung der c.
abee		ccdd	
accc		ccde	
accd		ccee	
acce		cddd	
acdd	3. Ordnung der c.	cdde	2. Ordnung der d.
acde		cdee	
acee		ceee	3. O. d. e
addd		IV. Klasse der d.	
adde	4. Ordnung der d.	dddd	1. Ordnung der d.
adee		ddde	
aeee	5. Ordnung der e.	ddee	
		deee	2. O. d. e
		V. Klasse der e.	
		eeee	1. O. d. e

Combinationen

mit Wiederholungen zu je 5 der 4 gegebenen Elemente a, b, c, d, (es ist also hier n > m); ihre Anzahl $= \frac{4\times5\times6\times7\times8}{1\times2\times3\times4\times5} = 56.$

I. Klasse der a		II. Klasse der b.	
aaaaa		bbbbb	
aaaab		bbbbc	
aaaac		bbbbd	
aaaad		bbbcc	1. UO. d. bb.
aaabb	1. UO. der aa.	bbbcd	
aaabc		bbbdd	
aaabd		bbccc	
aaacc		bbccd	2. UO. d. bc.
aaacd		bbcdd	
aaadd		bbddd	3. UO. d. bd.
aabbb		bcccc	
aabbc		bcccd	1. UO. d. cc.
aabbd	2. UO. d. ab.	bccdd	
aabcc		bcddd	2. UO. d. cd.
aabcd		bdddd	3. O. d. d
aabdd			
aaccc		III. Klasse der c	
aaccd	3. UO. d. ac.	ccccc	
aacdd		ccccd	1. UO. d. cc.
aaddd	4. UO. d. ad	cccdd	
abbbb		ccddd	2. UO. d. cd.
abbbc		cdddd	2. O. d. d
abbbd	1. UO. d. bb.		
abbcc		IV. Klasse der d	
abbcd		ddddd	1. O. d. d
abbdd			
abccc			
abccd	2. UO. d. bc.		
abcdd			
abddd	3. UO. d. bd.		
acccc			
acccd	1. UO. d. cc.		
accdd			
acddd	2 UO. d. cd.		
adddd	4. O. d. d		

Anm. UO. heißt Unterordnung.

Tab. III.

Combinationen

ohne Wiederholungen zu je 4 der 7 gegebenen Elemente a, b, c, d, e, f und g; ihre Anzahl =

$$\frac{7\times6\times5\times4}{1\times2\times3\times4} = 35.$$

I. Klasse der *a*		II. Klasse der *b*	
abcd	1. Ordnung der *b*.	*bcde*	1. Ordnung der *c*.
abce		*bcdf*	
abcf		*bcdg*	
abcg		*bcef*	
abde		*bceg*	
abdf		*bcfg*	
abdg		*bdef*	2. Ordnung der *d*.
abef		*bdeg*	
abeg		*bdfg*	
abfg		*befg*	3. O. d. e
acde	2. Ordnung der *c*.	III. Klasse d. *c*	
acdf		*cdef*	1. Ordnung der *d*.
acdg		*cdeg*	
acef		*cdfg*	
aceg		*cefg*	2. O. d. e
acfg		IV. Klasse d. *d*	
adef	3. Ordnung der *d*.	*defg*	1. O. d. e
adeg			
adfg			
aefg	4. O. d. e		

Tab. IV.

Combinationen

ohne Wiederholungen zu je 5 der 8 gegebenen Elemente a, b, c, d, e, f, g und h; ihre Anzahl =

$$\frac{8\times7\times6\times5\times4}{1\times2\times3\times4\times5} = 56.$$

I. Klasse der *a*.			II. Klasse der *b*.		
abcde	1. Ordnung der *a*.		*bcdef*	1. U. d. cd.	1. Ordnung der *c*.
abcdf			*bcdeg*		
abcdg			*bcdeh*		
abcdh			*bcdfg*		
abcef	1. U. d. bc.		*bcdfh*		
abceg			*bcdgh*		
abceh			*bcefg*	2. U. d. ce.	
abcfg			*bcefh*		
abcfh			*bcegh*		
abcgh			*bcfgh*	3. U. d. cf.	
abdef	2. Ordnung der *b*.		*bdefg*	1. U. d. de.	2. Ordn. d. *d*.
abdeg			*bdefh*		
abdeh	2. U. d. bd.		*bdegh*		
abdfg			*bdfgh*	2. U. d. df.	
abdfh			*befgh*	3. O. d. e.	
abdgh			III. Klasse der *c*.		
abefg	3. U. d. be.		*cdefg*	1. U. d. de.	1. Ordn. d. *d*.
abefh			*cdefh*		
abegh			*cdegh*		
abfgh	4. U. d. bf.		*cdfgh*	2. U. d. df.	
acdef	1. Ordnung der *c*.		*cefgh*	2. O. d. e.	
acdeg			VI. Klasse d. *d*.		
acdeh			*defgh*	1. O. d. e.	
acdfg					
acdfh					
acdgh					
acefg	2. U. d. ce.				
acefh					
acegh					
acfgh	3. U. d. cf.				
adefg	3. Ordn. d. *d*.				
adefh	1. U. d. de.				
adegh					
adfgh	2. U. d. df.				
aefgh	4. O. d. e.				

Tab. V.

Permutationen

der 5 verschiedenen Elemente *a*, *b*, *c*, *d* und *e*. Ihre Anzahl $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. Die permutablen Dinge sind die Buchstaben.

1. Reihe d. *a*.	2. Reihe d. *b*.	3. Reihe d. *c*.	4. Reihe d. *d*.	5. Reihe d. *e*.
ab′ c″ d‴ e⁗	*ba′ c″ d‴ e⁗*	*ca′ b″ d‴ e⁗*	*da′ b″ c‴ e⁗*	*ea′ b″ c‴ d⁗*
ab′ c″ e‴ d⁗	*ba′ c″ e‴ d⁗*	*ca′ b″ e‴ d⁗*	*da′ b″ e‴ c⁗*	*ea′ b″ d‴ c⁗*
ab′ d″ c‴ e⁗	*ba′ d″ c‴ e⁗*	*ca′ d″ b‴ e⁗*	*da′ c″ b‴ e⁗*	*ea′ c″ b‴ d⁗*
ab′ d″ e‴ c⁗	*ba′ d″ e‴ c⁗*	*ca′ d″ e‴ b⁗*	*da′ c″ e‴ b⁗*	*ea′ c″ d‴ b⁗*
ab′ e″ c‴ d⁗	*ba e c d*	*ca e b d*	*da e b c*	*ea d b c*
ab′ e″ d‴ c⁗	*ba e d c*	*ca e d b*	*da e c b*	*ea d c b*
ac b d e	*bc d a e*	*cb d a e*	*db a c e*	*eb a c d*
ac b e d	*bc a e d*	*cb a e d*	*db a e c*	*eb a d c*
ac d b e	*bc d a e*	*cb d a e*	*db c a e*	*eb c a d*
ac d e b	*bc d e a*	*cb d e a*	*db c e a*	*eb c d a*
ac e b d	*bc e a d*	*cb e a d*	*db e a c*	*eb d a c*
ac e d b	*bc e d a*	*cb e d a*	*db e c a*	*eb d c a*
ad b c e	*bd a c e*	*cd a b e*	*dc a b e*	*ea b d c*
ad b e c	*bd a e c*	*cd a e b*	*dc a e b*	*ec a d b*
ad c b e	*bd c a e*	*cd b a e*	*dc b a e*	*ec b a d*
ad c e b	*bd c e a*	*cd b e a*	*dc b e a*	*ec b d a*
ad e b c	*bd e a c*	*cd e a b*	*dc e a b*	*ec d a b*
ad e c b	*bd e c a*	*cd e b a*	*dc e b a*	*ec d b a*
ae b c d	*be a c d*	*ce a b d*	*de a b c*	*ed a b c*
ae b d c	*be a d c*	*ce a d b*	*de a c b*	*ed a c b*
ae c b d	*be c a d*	*ce b a d*	*de b a c*	*ed b a c*
ae c d b	*be c d a*	*ce b d a*	*de b c a*	*ed b c a*
ae d b c	*be d a c*	*ce d a b*	*de c a b*	*ed c a b*
ae d c b	*be d c a*	*ce d b a*	*de c b a*	*ed c b a*

Von den 4 Ordnungen der ersten Klasse hätte die erste $\frac{4 \times 5 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 20$, *) die zweite $\frac{4 \times 5}{1 \times 2} = 10$ und die dritte $\frac{4}{1} = 4$ Combinationen.

*) Wenn nämlich $n - 1$ für n in die bei den Klassen entwickelte Formel gesetzt wird.

Tab. VI.

Permutationen

der 5 verschiedenen Elemente *a*, *b*, *c*, *d* und *e*. Die permutablen Dinge sind hier ^{o} $^{'}$ $^{''}$ $^{'''}$ $^{''''}$, die Buchstaben aber die Stellenhalter.

1. Reihe der ^{o}	2. Reihe d. $^{'}$	3. Reihe d. $^{''}$	4. Reihe d. $^{'''}$	5. Reihe d. $^{''''}$
$ab^{'}c^{''}d^{'''}e^{''''}$	$a^{'}bc^{''}d^{'''}e^{''''}$	$a^{''}bc^{'}d^{'''}e^{''''}$	$a^{'''}bc^{'}d^{''}e^{''''}$	$a^{''''}bc^{'}d^{''}e^{'''}$
$ab^{'}c^{''}d^{''''}e^{'''}$	$a^{'}bc^{''}d^{''''}e^{'''}$	$a^{''}bc^{'}d^{''''}e^{'''}$	$a^{'''}bc^{'}d^{''''}e^{''}$	$a^{''''}bc^{'}d^{'''}e^{''}$
$ab^{'}c^{'''}d^{''}e^{''''}$	$a^{'}bc^{'''}d^{''}e^{''''}$	$a^{''}bc^{'''}d^{'}e^{''''}$	$a^{'''}bc^{''}d^{'}e^{''''}$	$a^{''''}bc^{''}d^{'}e^{'''}$
$ab^{'}c^{'''}d^{''''}e^{''}$	$a^{'}bc^{'''}d^{''''}e^{''}$	$a^{''}bc^{'''}d^{''''}e^{'}$	$a^{'''}bc^{''}d^{''''}e^{'}$	$a^{''''}bc^{''}d^{'''}e^{'}$
$ab^{'}c^{''''}d^{''}e^{'''}$	$a^{'}bc^{''''}d^{''}e^{'''}$	$a^{''}bc^{''''}d^{'}e^{'''}$	$a^{'''}bc^{''''}d^{'}e^{''}$	$a^{''''}bc^{'''}d^{'}e^{''}$
$ab^{'}c^{''''}d^{'''}e^{''}$	$a^{'}bc^{''''}d^{'''}e^{''}$	$a^{''}bc^{''''}d^{'''}e^{'}$	$a^{'''}bc^{''''}d^{''}e^{'}$	$a^{''''}bc^{'''}d^{''}e^{'}$
$ab^{''}c^{'}d^{'''}e^{''''}$	$a^{'}b^{''}cd^{'''}e^{''''}$	$a^{''}b^{'}cd^{'''}e^{''''}$	$a^{'''}b^{'}cd^{''}e^{''''}$	$a^{''''}b^{'}cd^{''}e^{'''}$
$ab^{''}c^{'}d^{''''}e^{'''}$	$a^{'}b^{''}cd^{''''}e^{'''}$	$a^{''}b^{'}cd^{''''}e^{'''}$	$a^{'''}b^{'}cd^{''''}e^{''}$	$a^{''''}b^{'}cd^{'''}e^{''}$
$ab^{''}c^{'''}d^{'}e^{''''}$	$a^{'}b^{''}c^{'''}de^{''''}$	$a^{''}b^{'}c^{'''}de^{''''}$	$a^{'''}b^{'}c^{''}de^{''''}$	$a^{''''}b^{'}c^{''}de^{'''}$
$ab^{''}c^{'''}d^{''''}e^{'}$	$a^{'}b^{''}c^{'''}d^{''''}e$	$a^{''}b^{'}c^{'''}d^{''''}e$	$a^{'''}b^{'}c^{''}d^{''''}e$	$a^{''''}b^{'}c^{''}d^{'''}e$
$ab^{''}c^{''''}d^{'}e^{'''}$	$a^{'}b^{''}c^{''''}de^{'''}$	$a^{''}b^{'}c^{''''}de^{'''}$	$a^{'''}b^{'}c^{''''}de^{''}$	$a^{''''}b^{'}c^{'''}de^{''}$
$ab^{''}c^{''''}d^{'''}e^{'}$	$a^{'}b^{''}c^{''''}d^{'''}e$	$a^{''}b^{'}c^{''''}d^{'''}e$	$a^{'''}b^{'}c^{''''}d^{''}e$	$a^{''''}b^{'}c^{'''}d^{''}e$
$ab^{'''}c^{'}d^{''}e^{''''}$	$a^{'}b^{'''}cd^{''}e^{''''}$	$a^{''}b^{'''}cd^{'}e^{''''}$	$a^{'''}b^{''}cd^{'}e^{''''}$	$a^{''''}b^{''}cd^{'}e^{'''}$
$ab^{'''}c^{'}d^{''''}e^{''}$	$a^{'}b^{'''}cd^{''''}e^{''}$	$a^{''}b^{'''}cd^{''''}e^{'}$	$a^{'''}b^{''}cd^{''''}e^{'}$	$a^{''''}b^{''}cd^{'''}e^{'}$
$ab^{'''}c^{''}d^{'}e^{''''}$	$a^{'}b^{'''}c^{''}de^{''''}$	$a^{''}b^{'''}c^{'}de^{''''}$	$a^{'''}b^{''}c^{'}de^{''''}$	$a^{''''}b^{''}c^{'}de^{'''}$
$ab^{'''}c^{''}d^{''''}e^{'}$	$a^{'}b^{'''}c^{''}d^{''''}e$	$a^{''}b^{'''}c^{'}d^{''''}e$	$a^{'''}b^{''}c^{'}d^{''''}e$	$a^{''''}b^{''}c^{'}d^{'''}e$
$ab^{'''}c^{''''}d^{'}e^{''}$	$a^{'}b^{'''}c^{''''}de^{''}$	$a^{''}b^{'''}c^{''''}de^{'}$	$a^{'''}b^{''}c^{''''}de^{'}$	$a^{''''}b^{''}c^{'''}de^{'}$
$ab^{'''}c^{''''}d^{''}e^{'}$	$a^{'}b^{'''}c^{''''}d^{''}e$	$a^{''}b^{'''}c^{''''}d^{'}e$	$a^{'''}b^{''}c^{''''}d^{'}e$	$a^{''''}b^{''}c^{'''}d^{'}e$
$ab^{''''}c^{'}d^{''}e^{'''}$	$a^{'}b^{''''}cd^{''}e^{'''}$	$a^{''}b^{''''}cd^{'}e^{'''}$	$a^{'''}b^{''''}cd^{'}e^{''}$	$a^{''''}b^{'''}cd^{'}e^{''}$
$ab^{''''}c^{'}d^{'''}e^{''}$	$a^{'}b^{''''}cd^{'''}e^{''}$	$a^{''}b^{''''}cd^{'''}e^{'}$	$a^{'''}b^{''''}cd^{''}e^{'}$	$a^{''''}b^{'''}cd^{''}e^{'}$
o //// // / ///	/ //// // o ///	// //// / o ///	/// //// / o //	//// /// / o //
o //// // /// /	/ //// // /// o	// //// / /// o	/// //// / // o	//// /// / // o
o //// /// / //	/ //// /// o //	// //// /// o /	/// //// // o /	//// /// // o /
o //// /// // /	/ //// /// // o	// //// /// / o	/// //// // / o	//// /// // / o

Es hätten also von den drei Ordnungen der zweiten Klasse die erste 10, die zweite 4 und die dritte 1 Combination; von den zwei Ordnungen der dritten Klasse hätte die erste 4, die zweite 1 Combination, und die eine Ordnung der letzten Klasse hätte bekanntlich nur eine Combination.

Um nun diese Combinationen zu bilden, schreibe man den Buchsta-

Tab. VII.

Permutationen der 6 Elemente *aaa bb c*. Ihre Anzahl $= \frac{6.5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1.1} = 60$

3 Reihen für die 3 gegeb. a.	2 Reihen für die 2 gegeb. b.	1 Reihe für das gegeb. c.
aaabbc	*baaabc*	*caaabb*
aaabcb	*baaacb*	*caabab*
aaacbb	*baabac*	*caabba*
aababc	*baabca*	*cabaab*
aabacb	*baacab*	*cababa*
aabbac	*baacba*	*cabbaa*
aabbca	*babaac*	*cbaaab*
aabcab	*babaca*	*cbaaba*
aabcba	*babcaa*	*cbabaa*
1 *aac abb*	4 *bacaab*	6 *cbbaaa*
aac bab	*bacaba*	
aac bba	*bacbaa*	
abaabc	*bbaaac*	
abaacb	*bbaaca*	
ababac	*bbacaa*	
ababca	*bbcaaa*	
abacab	*bcaaab*	
abacba	*bcaaba*	
abbaac	*bcabaa*	
2 *abbaca*	5 *bcbaaa*	
abbcaa		
abc aab		
abc aba		
abc baa		
acaabb		
acabab		
acabba		
acb aab		
acb aba		
3 *acb baa*		

Tab. VIII.

Permutationen der 6 Elemente *a b ccc d*

Ihre Anzahl $= \frac{6.5.4.3.2.1}{1.1.3.2.1.1} = 120.$

1 Reihe für das a	1 Reihe für d. b	3 Reihen für die 3 mal c		1 Reihe für d. d.
abcccd	*bacccd*	*cabccd*	*ccbacd*	*dabccc*
abccdc	*baccdc*	*cabcdc*	*ccbadc*	*dacbcc*
abc dcc	*bacdcc*	*cabdcc*	*ccbcad*	*daccbc*
abd ccc	*badccc*	*cacbcd*	*ccbcda*	*dacccb*
acbccd	*bcaccd*	*cacbdc*	*ccbdac*	*dbaccc*
acbcdc	*bcacdc*	*caccbd*	*ccbdca*	*dbcacc*
acbdcc	*bcadcc*	*caccdb*	*cccabd*	*dbccac*
accbcd	*bccacd*	*cadbcc*	*cccadb*	*dbccca*
accbdc	*bccadc*	*cadcbc*	*cccbad*	*dcabcc*
acccbd	*bcccad*	*cadccb*	*cccbda*	*dcacbc*
acccdb	*bcccda*	*cbaccd*	*cccdab*	*dcaccb*
accdbc	*bccdac*	*cbacdc*	*cccdba*	*dcbacc*
accdcb	*bccdca*	*cbadcc*	*ccdabc*	*dcbcac*
acdbcc	*bcdacc*	*cbcacd*	*ccdacb*	*dcbcca*
acd cbc	*bcdcac*	*cbcadc*	*ccdbac*	*dccabc*
acd ccb	*bcdcca*	*cbccad*	*ccdbca*	*dccacb*
adbccc	*bdaccc*	*cbccda*	*ccdcab*	*dccbac*
adc bcc	*bdcacc*	*cbcdac*	*ccdcba*	*dccbca*
adc cbc	*bdccac*	*cbcdca*	*cdabcc*	*dcccab*
adc ccb	*bdccca*	*cbdacc*	*cdacbc*	*dcccba*
		cbdcac	*cdaccb*	
		cbdcca	*cdbacc*	
		ccabcd	*cdbcac*	
		ccabdc	*cdbcca*	
		ccacbd	*cdccabc*	
		ccacdb	*cdcacb*	
		ccadbc	*cdcbac*	
		ccadcb	*cdcbca*	
		cacdbc	*cdccab*	
		cacdcb	*cdccba*	

ben *a* 35mal, den Buchstaben *b* 15mal, den Buchstaben *c* 5mal, und den Buchstaben *d* einmal unter einander, **) so hat man

**) Nämlich jeden Charakterbuchstaben sovielmal, als die Klasse, Ordnung u. s. w., die man bilden will, Combinationen enthält.

Tab, IX.

Variationen mit Wiederholungen zu je 3 der 5 gegebenen Elemente *a, b, c, d, e.* Ihre Anzahl $= 5^3 = 125$.

Kolonne d. a	Kolonne d. b	Kolonne d. c	Kolonne d. d	Kolonne d. e
aaa	*baa*	*caa*	*daa*	*eaa*
aab	*bab*	*cab*	*dab*	*eab*
aac	*bac*	*cac*	*dac*	*eac*
aad	*bad*	*cad*	*dad*	*ead*
aae	*bae*	*cae*	*dae*	*eae*
aba	*bba*	*cba*	*dba*	*eba*
abb	*bbb*	*cbb*	*dbb*	*ebb*
abc	*bbc*	*cbc*	*dbc*	*ebc*
abd	*bbd*	*cbd*	*dbd*	*ebd*
abe	*bbe*	*cbe*	*dbe*	*ebe*
aca	*bca*	*cca*	*dca*	*eca*
acb	*bcb*	*ccb*	*dcb*	*ecb*
acc	*bcc*	*ccc*	*dcc*	*ecc*
acd	*bcd*	*ccd*	*dcd*	*ecd*
ace	*bce*	*cce*	*dce*	*ece*
ada	*bda*	*cda*	*dda*	*eda*
adb	*bdb*	*cdb*	*ddb*	*edb*
adc	*bdc*	*cdc*	*ddc*	*edc*
add	*bdd*	*cdd*	*ddd*	*edd*
ade	*bde*	*cde*	*dde*	*ede*
aea	*bea*	*cea*	*dea*	*eea*
aeb	*beb*	*ceb*	*deb*	*eeb*
aec	*bec*	*cec*	*dec*	*eec*
aed	*bed*	*ced*	*ded*	*eed*
aee	*bee*	*cee*	*dee*	*eee*

Tab. X.

Variation. m. Wiederholungen zu je 4 d. 3 gegeb. Elemente *a, b* u. *c.* Ihre Anzahl $= 3^4 = 81$.

Kolonne der a.	Kolonne der b.	Kolonne der c.
aaaa	*baaa*	*caaa*
aaab	*baab*	*caab*
aaac	*baac*	*caac*
aaba	*baba*	*caba*
aabb	*babb*	*cabb*
aabc	*babc*	*cabc*
aaca	*baca*	*caca*
aacb	*bacb*	*cacb*
aacc	*bacc*	*cacc*
abaa	*bbaa*	*cbaa*
abab	*bbab*	*cbab*
abac	*bbac*	*cbac*
abba	*bbba*	*cbba*
abbb	*bbbb*	*cbbb*
abbc	*bbbc*	*cbbc*
abca	*bbca*	*cbca*
abcb	*bbcb*	*cbcb*
abcc	*bbcc*	*cbcc*
acaa	*bcaa*	*ccaa*
acab	*bcab*	*ccab*
acac	*bcac*	*ccac*
acba	*bcba*	*ccba*
acbb	*bcbb*	*ccbb*
acbc	*bcbc*	*ccbc*
acca	*bcca*	*ccca*
accb	*bccb*	*cccb*
accc	*bccc*	*cccc*

die erste Reihe aller 56 Combinationen. Hinter die 35 mal *a* schreibe man vor die ersten 20 den nächstfolgenden Buchstaben *b*, so hat man die zwei Reihen, die die erste Ordnung in der ersten Klasse karakterisiren; dann setze man hinter die noch übrigen 15 *a* den nächstfolgenden Buchstaben *c* 10 mal, so hat man die 2 Reihen der zweiten Ordnung; den darauf folgenden

Tab. XI.

Variationen ohne Wiederholungen zu je 4 der 5 Elemente *a*, *b*, *c*, *d* und *e*. Ihre Anzahl = 5×4×3×2 = 120.

Kol. der a.	Kol. der b	Kol. der c.	Kol. der d.	Kol. der e.
abcd	*bacd*	*cabd*	*dabd*	*eabc*
abce	*bace*	*cabe*	*dabe*	*eabd*
abdc	*badc*	*cadb*	*dacb*	*eacb*
abde	*bade*	*cade*	*dace*	*eacd*
abec	*baec*	*caeb*	*daeb*	*eadb*
abed	*baed*	*caed*	*daec*	*eadc*
acbd	*bcad*	*cbad*	*dbac*	*ebac*
acbe	*bcae*	*cbae*	*dbae*	*ebad*
acdb	*bcda*	*cbda*	*dbca*	*ebca*
acde	*bcde*	*cbde*	*dbce*	*ebcd*
aceb	*bcea*	*cbea*	*dbea*	*ebda*
aced	*bced*	*cbed*	*dbec*	*ebdc*
adbc	*bdac*	*cdab*	*dcab*	*ecab*
adbe	*bdae*	*cdae*	*dcae*	*ecad*
adcb	*bdca*	*cdba*	*dcba*	*ecba*
adce	*bdce*	*cdbe*	*dcbe*	*ecbd*
adeb	*bdea*	*cdea*	*dcea*	*ecda*
adec	*bdec*	*cdeb*	*dceb*	*ecdb*
aebc	*beac*	*ceab*	*deab*	*edab*
aebd	*bead*	*cead*	*deac*	*edac*
aecb	*beca*	*ceba*	*deba*	*edba*
aecd	*becd*	*cebd*	*debc*	*edbc*
aedb	*beda*	*ceda*	*deca*	*edca*
aedc	*bedc*	*cedb*	*decb*	*edcb*

Tab. XII.

Variationen ohne Wiederholungen zu je 5 der 5 Elemente *a*, *b*, *c*, *d* und *e*. Ihre Anzahl = 5×4×3×2×1 = 120.

Kolon. der a.	Kolon. der b.	Kolon. der c.	Kolon. der d.	Kolon. der e.
abcde	*bacde*	*cabde*	*dabce*	*eabcd*
abced	*baced*	*cabed*	*dabec*	*eabdc*
abdce	*badce*	*cadbe*	*dacbe*	*eacbd*
abdec	*badec*	*cadeb*	*daceb*	*eacdb*
abecd	*baecd*	*caebd*	*daebc*	*eadbc*
abedc	*baedc*	*caedb*	*daecb*	*eadcb*
acbde	*bcade*	*cbade*	*dbace*	*ebacd*
acbed	*bcaed*	*cbaed*	*dbaec*	*ebadc*
acdbe	*bcdae*	*cbdae*	*dbcae*	*ebcad*
acdeb	*bcdea*	*cbdea*	*dbcea*	*ebcda*
acebd	*bcead*	*cbead*	*dbeac*	*ebdac*
acedb	*bceda*	*cbeda*	*dbeca*	*ebdca*
adbce	*bdace*	*cdabe*	*dcabe*	*ecabd*
adbec	*bdaec*	*cdaeb*	*dcaeb*	*ecadb*
adcbe	*bdcae*	*cdbae*	*dcbae*	*ecbad*
adceb	*bdcea*	*cdbea*	*dcbea*	*ecbda*
adebc	*bdeac*	*cdeab*	*dceab*	*ecdab*
adecb	*bdeca*	*cdeba*	*dceba*	*ecdba*
aebcd	*beacd*	*ceabd*	*deabc*	*edabc*
aebdc	*beadc*	*ceadb*	*deacb*	*edacb*
aecbd	*becad*	*cebad*	*debac*	*edbac*
aecdb	*becda*	*cebda*	*debca*	*edbca*
aedbc	*bedac*	*cedab*	*decab*	*edcab*
aedcb	*bedca*	*cedba*	*decba*	*edcba*

Buchstaben *d* 4 mal, so hat man die zwei Reihen der zweiten Ordnung; und endlich den folgenden Buchstaben *e* hinter das letzte *a*, wodurch man 2 Elemente der einzigen Combination der 4ten Ordnung erhält.

Da bei unserem Beispiel $n > 4$; so bestimme man die Zahl der Combinationen, die jede Unterordnung in der ersten Klasse enthält;

a) bei der ersten Ordnung hat 1) die erste Unterordnung soviel als die zweite Ordnung, also 10 Combinationen, oder allgemein $\frac{3\times4\times5}{1.2.3} = 10$; wenn $n - 2$ statt n in bei den Klassen entwickelte Formel gesetzt wird; 2) die zweite Unterordnung soviel als die erste Unterordnung der folgenden Ordnung, nämlich $\frac{3\times4}{1.2} = 6$; 3) die dritte Unterordnung soviel als die erste Unterordnung der dritten Ordnung, nämlich $\frac{3}{1} = 3$.

b) Bei der zweiten Ordnung hat 1) die erste Unterordnung soviel als die zweite der vorigen Ordnung hatte, nämlich 6; 2) die zweite Unterordnung soviel als die dritte der vorigen Ordnung hatte, nämlich 3.

c) Bei der dritten Ordnung hat 1) die erste Unterordnung soviel als die zweite der vorigen Ordnung, nämlich 3.

Man schreibe nun bei der ersten Ordnung den nächstfolgenden Buchstaben *c* 10 mal, den auf diesen folgenden *d* 6 mal, den darauf folgenden *e* 4 mal und endlich *f* nur 1 mal hinter die schon vorhandenen 20 gleichen Verbindungen *ab*, so hat man in der neuen Reihe die ersten Buchstaben aller Combinationen der 4 Unterordnungen in der ersten Ordnung. Bei der zweiten Ordnung ist der nächstfolgende Buchstabe *d*; man setze dasselbe 6 mal, das darauf folgende *e* 3 mal und das *f* 1 mal an die schon vorhandenen 10 mal *ac*, so enthält diese neue Reihe die ersten Buchstaben aller Combinationen der 3 Unterordnungen der zweiten Ordnung. Bei der dritten Ordnung schreibt man den auf *d* folgenden Buchstaben 3 mal und das auf diesen folgende *f* 1 mal an die vorhandenen 4 mal *ad*, und endlich bei der vierten Dronung setzt man den nächstfolgenden Buchstaben *f* an das einmal vorhandene *ae*; so hat man alle ersten Buchstaben der Combinationen sämmtlicher Unterordnungen der ersten Klasse. Die nun noch fehlende 4te und 5te Reihe aller Combi-

nationen dieser Klasse wird erhalten: wenn man den, auf den letzten Buchstaben der schon vorhandenen Verbindungen zu je 3, noch folgenden Buchstaben sovielmal an dieselben und unter einander schreibt, als auf ihn noch Buchstaben in alphabetischer Ordnung folgen, hinter diesen vierten Buchstaben aber als letzten oder fünften noch die auf ihn folgenden Buchstaben, ebenfalls in alphabetischer Ordnung, unter einander setzet. Bei unserm Beispiele wäre bei der ersten Verbindung *abc* der nächstfolgende Buchstabe *d* und auf diesen folgten noch die Buchstaben *e*, *f*, *g* und *h*, also müßte dieser Buchstabe viermal angesetzt werden, und der folgende fünfte Buchstabe wäre, bei der ersten Verbindung *e*, bei der zweiten *f*, bei der dritten *g* und bei der vierten *h*.

Der nun auf *d* folgende Buchstabe *e* hätte nur noch 3 Buchstaben hinter sich; er dürfte also bei den nächsten Verbindungen auch nur dreimal untergesetzt werden, und die fünften Buchstaben dieser drei Verbindungen wären *f*, *g* und *h*. Der auf *e* folgende Buchstabe *f* hätte nur noch zwei, und der auf *f* folgende noch einen Buchstaben hinter sich; mit beiden wie bei den früheren Buchstaben verfahren, würde die Combinationen der ersten Unterordnung vollzählig machen. Bei der zweiten und den folgenden Unterordnungen wird auf gleiche Weise verfahren, bis alle Combinationen dieser Klasse vollzählig sind, nämlich aus $n = 5$ verschiedenen Buchstaben bestehen. Auf gleiche Weise würde man auch die Combinationen jeder folgenden Klasse bestimmen können, wie dies aus Tab. III. u. IV. deutlicher zu ersehen ist; nur bemerke man rücksichtlich dessen, daß der Buchstabe, der die erste Klasse karakterisirt, bei keiner folgenden Klasse, so wie der, der eine frühere Ordnung oder Unterordnung bestimmt, bei keiner späteren Ordnung oder Unterordnung wieder erscheinen darf.

Auch die Combinationen mit Wiederholungen werden, nach der für selbige gegebenen Formel, auf ähnliche Art gebildet (siehe

Tab. I. u. II.); nur bemerke man, daß jede erste Combination einer jeden Klasse aus der *n*maligen Wiederholung desjenigen Buchstabens besteht, der die Klasse karakterisirt; eben so die der Ordnungen und Unterordnungen, bei denen jedoch die letzten Buchstaben in alphabetischer Folge so unter einander geschrieben werden, daß der, der die Klasse karakterisirt, der erste in der ersten Unterordnung, und der letzte der gegebenen Buchstaben der letzte in der letzten Combination dieser Unterordnung ist. In der zweiten Unterordnung fängt der zweite an (von den Karakterbuchstaben der Klasse an gerechnet) und der letzte hört auf, ꝛc.

§. 105.

Bildung der Permutationen.

Bei Darstellung der Permutationen unterscheidet man in vielen Fällen den Stellenhalter von dem permutablen Dinge; sehr oft wird jedoch eins von beiden weggelassen. Bedient man sich nämlich der, schon in §. 64 gebrauchten Bezeichnung der Buchstaben durch Oberstriche ($'$ $''$ $'''$ $''''$ v vi), so kann man eine zum Permutiren gegebene Anzahl von Buchstaben entweder 1) wirklich nach der folgenden Anweisung versetzen und die Oberstriche nach ihrer Reihenfolge hinschreiben (wie es in den 4 ersten Kolonnen der Tabelle V. geschehen); oder man kann 2) die Buchstaben in der einmal angenommenen Ordnung stehen lassen, und nur ihre Oberstriche versetzen (wie dies in Tabelle VI. geschehen); oder man kann 3) eins von beiden weglassen (wie es in den übrigen Kolonnen der Tabelle V. und den 4 letzten Kolonnen der Tabelle VI. geschehen). Nach der ersten Permutationsmethode können die in §. 64 angegebenen Formeln gebildet und nach Befinden vermehrt werden.

Alle Permutationen, die mit einerlei Buchstaben anfangen, nenne ich eine Kolonne, die hinter den Kolonnen folgenden Vertical-Reihen aber die 1ste, 2te, 3te ... m—1te Reihe, je nach-

dem solche die 1ste, 2te, 3te ... $m-1$te Stelle nach der Kolonnenreihe einnimmt. (Vergl. hier und ff. Tabelle V — VIII.)

Solcher Kolonnen legt man soviel an, als Buchstaben gegeben sind, und ordnet dieselben nach alphabetischer Folge, so daß die Kolonne der *a* die erste, die der *b* die zweite u. s. w. wird.

Die Anzahl der gleichen Buchstaben, aus der eine Kolonne bestehet, findet man nach §. 101, wenn man in die dortigen Formeln $m-1$ statt m setzt. Bei Tabelle V. sind z. B. $5 = m$ Buchstaben gegeben; die Zahl der gleichen Buchstaben einer jeden Kolonne wäre also $= (m-1)(m-2)(m-3)(m-4) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Die erste Kolonne bestände also bei unserm Beispiel aus 24 *a*, die zweite aus 24 *b*, die dritte aus 24 *c*, die vierte aus 24 *d* und die fünfte aus 24 *e*.

Auf dieselbe Art, wie man hier durch die angezogenen Formeln die Zahl der Buchstaben der Kolonnen bestimmte, bestimmt man auch die Zahl der gleichen Buchstaben der folgenden Reihen, indem man in jene Formeln a) bei der ersten Reihe $m-2$ statt m, b) bei der zweiten Reihe $m-3$ statt m, und allgemein c) bei der $m-1$ten Reihe $m-m+1$ statt m in die Formeln des 101sten §s. setzet.

Da durch jede dieser Formeln nur angegeben wird, wieviel mal ein gleicher Buchstabe bei der zu bildenden Reihe vorkommt, diese Zahlen aber stets a) bei der ersten Reihe $m-1$ mal, b) bei der zweiten $3(m-1)$ mal, und c) bei der dritten $6(m-1)$ mal kleiner als bei der Kolonne sind, so kann man dieselben auch aus der Zahl der Buchstaben, welche die Kolonne bilden, unmittelbar bestimmen. In unserm Beispiel wäre diese Zahl a) bei der ersten Reihe $\frac{24}{5-1} = 6$, b) bei der zweiten $\frac{24}{3(5-1)} = 2$ und c) in der dritten $\frac{24}{6(5-1)} = 1$. Da jedoch jede Kolonne hier 24 gleiche Buchstaben umfaßt, so muß jeder der noch übrigen $m-1$ Buchstaben 6mal hinter die Buchstaben

der Kolonne gesetzt werden, und dieses Hinter- und Untereinandersetzen geschieht so nach alphabetischer Folge, daß bei der ersten Reihe in der Kolonne der a 6 mal b, 6 mal c, 6 mal d und 6 mal e unter einander gesetzt werden; bei der ersten Reihe der Kolonne der b werden 6 mal a, 6 mal c, 6 mal d und 6 mal e; bei der Kolonne der c aber 6 mal a, 6 mal b, 6 mal d und 6 mal e ꝛc. gesetzt. Es wird ferner in der zweiten Reihe der ersten Kolonne 2 mal c, 2 mal d und 2 mal e gesetzt; dann tritt hier der in der ersten Reihe nicht mehr befindliche Buchstabe b ein, und dieser wird 2 mal, und nach ihm 2 mal d und 2 mal e gesetzt; dann kommt wiederum 2 mal b, 2 mal c und 2 mal e, weil der Buchstabe d in der ersten Reihe erscheint; endlich kommt 2 mal b, 2 mal c und 2 mal d unter einander, und nun ist man auch mit dieser Reihe zu Ende. Auf ähnliche Art werden die zweiten Reihen der übrigen Kolonnen gebildet. Die letzten 2 Reihen werden durch Versetzung der 2 Buchstaben gebildet, die noch nicht in den vorstehenden Formen, welche die Kolonnen und die ersten $m-2$ Reihen bilden, erscheinen, und zwar sind diese 2 möglichen Versetzungen stets so zu bilden, daß allemal der Buchstabe, welcher der alphabetischen Folge nach eher kommt, bei der ersten dieser beiden Versetzungen der erste, bei der zweiten aber der letzte wird.

Sind die Oberstriche die permutablen Dinge und die Buchstaben nur die Stellenhalter, wie bei Tabelle VI., so erhält die erste Kolonne keine, die zweite einen, die dritte zwei, die vierte drei und die $n$te $n-1$ Oberstriche. Die Buchstaben werden dabei in allen Formen gleich eingesetzt und die Oberstriche werden diesen nach denselben Gesetzen angehängt, die oben beim Versetzen der Buchstaben gegeben wurden.

Bei Permutationen, wo unter den gegebenen m Elementen zwei oder mehrere gleiche sind, bilde man soviel Kolonnen, als verschiedene Elemente gegeben sind; jedoch müssen die Kolonnen der Elemente, die n, p oder q mal unter den gegebenen vorkommen, auch n, p oder q mal soviel gleiche Buchstaben erhalten, als die

de... gegebene Formel besagt. Dasselbe gilt auch rücksichtlich der zu bildenden Reihen. — Wären z. B. die Buchstaben *aaabbc* gegeben (s. Tab. VII.), so wäre die Anzahl aller Permutationen nach §. 101 $= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1} = 60$. Jede der 6 Kolonnen würde, wenn alle 6 Elemente verschieden wären, einen gleichen Buchstaben enthalten: $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = \frac{60}{6} = 10$ mal. Da nun der Buchstabe *a* dreimal vorhanden, so beständen die drei ersten Kolonnen aus lauter *a*; dieser Buchstabe wäre also $10 \times 3 = 30$ mal unter einander zu setzen. Eben so würden die zwei folgenden Kolonnen aus lauter *b* bestehen; dieser Buchstabe wäre folglich $10 \times 2 = 20$ mal unter einander zu setzen; die sechste Kolonne enthielt jedoch den Buchstaben *c* nur 10 mal.

Unter den, nach Bildung der ersten Kolonne noch übrigen $m-1$ Buchstaben sind $n-1 = 2$ mal *a*, $p = 2$ mal *b* und 1 mal *c*; davon würde jedes nur einmal vorkommende Element nach §. 101 einen bestimmten Platz einnehmen:
$\frac{(m-2)(m-3) \ldots 2 \times 1}{(n-1) \times p(p-1) \ldots \times 1} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 2 \times 1 \times 1} = 6$ mal. Nun kommt aber *a* und *b* jedes zweimal vor, folglich würde die erste Reihe in der Kolonne der *a* aus $6 \times 2 = 12$ mal *a*, $6 \times 2 = 12$ mal *b* und $6 \times 1 = 6$ mal *c* bestehen. Die zweite Reihe dieser Kolonne bestimme man erstlich nur bis dahin, wo in der ersten Reihe ein andrer Buchstabe eintritt, also erstlich bis zu der Form *ab*, und dann bis zu der Form *ac* (diese Orte sind bei Tab. VII u. VIII durch Striche abgesondert). Unter den, zu dieser Bildung noch übrigen $m-2$ Elementen findet sich nun $n-2 = 1$ mal *a*, $p = 2$ mal *b* und 1 mal *c*. Davon würde jedes nur einmal vorkommende Element einen bestimmten Platz einnehmen:
$\frac{(m-3) \ldots \times 2 \times 1}{(n-2) \times p(p-1) \ldots \times 1} = \frac{3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 1} = 3$ mal. Der durch den Strich abgesonderte Theil der zweiten Reihe dieser Kolonnen bestände demnach aus $3 \times 1 = 3$ mal *a*, $3 \times 2 = 6$ mal *b*

und $3 \times 1 = 3$ mal c. Bei den folgenden Theil der Kolonnen wären die Formen ab schon vorhanden; es wäre also unter den übrigen Elementen a noch 2 mal, b nur einmal und c ebenfalls nur einmal; demnach bestände dieser Theil der zweiten Reihe aus $3 \times 2 = 6$ mal a, $3 \times 1 = 3$ mal b und $3 \times 1 = 3$ mal c. Aus gleichen Gründen würde der letzte Theil dieser Reihe aus $3 \times 2 = 6$ mal a und $3 \times 2 = 6$ mal b bestehen.

Die noch fehlenden drei Reihen dieser Kolonne bestehen aus Permutationen zu je drei. Solcher Permutationen sind:

1) nur eine, wenn die noch fehlenden 3 Buchstaben gleich sind, (siehe die letzten Formen der b und c Kolonnen),

2) nur drei, wenn unter den noch fehlenden Buchstaben zwei gleiche sind, (siehe die drei ersten in der a Kolonne),

3) sechs, wenn alle drei Buchstaben verschieden sind, (siehe die folgenden 6 Formen dieser Kolonne).

Diese Permutationen lassen sich schneller machen, als wenn man die Bildung der noch fehlenden Reihen nach dem angezogenen Gesetze bewirken wollte. Nur bemerke man dabei noch:

1) der erste Buchstabe (nach alphabetischer Folge) von den fehlenden dreien steht zuerst in der ersten Permutation;

2) derselbe steht zweimal zuerst, nämlich in der ersten und zweiten Permutation, wenn derselbe zweimal vorhanden oder unter den drei fehlenden Buchstaben einer, aber alle drei verschieden sind.

3) Jeder Buchstabe nimmt zweimal die erste Stelle ein, wenn alle drei Buchstaben verschieden sind.

Auf ähnliche Art, wie die Formen der Kolonne a gebildet wurden, werden auch die der übrigen Kolonnen gebildet.

§. 106.

Bildung der Variationen.

Bei Variationen mit und ohne Wiederholungen bilde man soviel Kolonnen als Buchstaben gegeben sind und ordne diese, wie bei den Permutationen, nach alphabetischer Folge.

Bei Variationen mit Wiederholungen besteht jede Kolonne aus $\frac{m^n}{m} = m^{n-1}$ gleichen Buchstaben. Bei Tabelle IX sind z. B. $m = 5$ Buchstaben gegeben, die zu je 3 mit Wiederholungen variirt werden sollen; im Ganzen sind also $5^3 = 125$ Variationen möglich; jede der 5 Kolonnen aber enthält deren $\frac{125}{5} = 5^2 = 25$, folglich auch 25 gleiche Buchstaben, die die erste Stelle einnehmen.

Bei Variationen ohne Wiederholungen bestehet ebenfalls jede Kolonne aus soviel gleichen Buchstaben, als deren der Quotient angibt, den man durch Division mit m in die Anzahl aller möglichen Variationen erhält; nämlich aus $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{m} = (m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)$. Bei Tabelle XI sind z. B. $5 = m$ Buchstaben gegeben, die zu je $n = 4$ variirt werden sollen; die Zahl aller möglichen Variationen ist also $5(5-1)(5-2)(5-3)(5-4) = 120$ und diese durch $m = 5$ dividirt, gibt in 24 die Zahl der Variationen einer Kolonne und folglich auch die Zahl der gleichen Buchstaben die die erste Stelle einnehmen.

Bei Variationen mit Wiederholungen werden die übrigen Verticalreihen also gebildet. Man dividire die Zahl der gleichen ersten Buchstaben der Kolonne durch m; so erhält man in dem Quotienten die Zahl, welche angibt, wievielmal jeder der vorhandenen Buchstaben, nach alphabetischer Folge, bei Bildung der ersten Reihe unter einander gesetzt werden muß. Bei dem obigen Beispiel (Tab. IX.), also besteht die erste Verticalreihe der a Kolonne aus $\frac{25}{5} = 5$ mal a, $\frac{25}{5} = 5$ mal b, 5 mal c, 5 mal d und 5 mal e. Auf gleiche Weise wird jede folgende Reihe gebildet, indem man immer mit m in die Anzahl der gleichen Buchstaben der vorhergehenden Reihe dividirt und mit der, durch den Quotienten bestimmten Zahl der gleichen Buchstaben, so wie oben angegeben wurde, verfährt.

Die letzte Reihe besteht aus Wiederholungen aller gegebenen *m* Buchstaben, bei denen immer *a* den Anfang und der letzte Buchstabe das Ende bildet.

Bei Bildung der Variationen ohne Wiederholungen wird fast auf gleiche Art verfahren; nur muß hier, um die Zahl der gleichen Buchstaben in jeder Reihe zu bestimmen, die Division in die gleiche Zahl der Buchstaben *a*) der Kolonne mit $m-1$, bei der ersten Reihe; in die *b*) der 1sten Reihe mit $m-2$, bei der zweiten Reihe; in die *c*) der 2ten Reihe mit $m-3$, bei der dritten Reihe; und allgemein in die der $n-1$sten Reihe mit $m-n$ bei der *n*ten Reihe, gemacht werden.

Die letzte Reihe wird gleichfalls und auf dieselbe Art, wie oben gelehrt ward, aus den Buchstaben gebildet, die in den bereits gebildeten Variationen zu je $n-1$ noch nicht enthalten sind.

In den übrigen Kolonnen sind, bei Variationen mit Wiederholungen, die Reihen vollkommen gleich denen der ersten Kolonne. Hat man also einmal diese gebildet, so dürfen bei den übrigen Kolonnen, nur an dem Buchstaben, der die Kolonne bezeichnet, dieselben Buchstaben und in derselben Ordnung, wie solche in der ersten Kolonne stehen, gesetzt werden.

Auch bei Variationen ohne Wiederholungen findet dies bis auf den Umstand statt: daß in jeder Reihe der Buchstabe fehlt, aus dem die Kolonne, die Reihe oder ein Theil der Reihe gebildet ward, an dessen Stelle aber derjenige kommt, der die vorherige Kolonne, Reihe oder einen Theil der Reihe bezeichnete. So besteht z. B. bei Tab. XI. in der Kolonne der *a*, die erste Verticalreihe aus 6 mal *b*, 6 mal *c*, 6 mal *d* und 6 mal *e*; dieselben Buchstaben kommen auch in den ersten Reihen der übrigen Kolonnen vor, nur wird in der *b* Kolonne statt 6 mal *b*, 6 mal *a*; in der *c* Kolonne statt 6 mal *c*, 6 mal *b*; in der *d* Kollonne statt 6 mal *d*, 6 mal *c* und in der *e* Kolonne statt 6 mal *e*, 6 mal *d* gesetzt. Ein Aehnliches findet auch bei den übrigen Reihen statt. Ist $n=n$ (Tab. XII.), so sind die beiden letzten Verticalreihen

einer jeden Kolonne Versetzungen der, bei je zwei gleichen Variationen noch fehlenden Buchstaben. So sind z. B. bei der *a* Kolonne die aus drei gleichen Buchstaben bestehenden 2 ersten Variationen *abc*; hier fehlen noch die Buchstaben *d* und *e*, von denen die beiden Versetzungen *de* und *ed* sind; letztere an erstere nach alphabetischer Folge angesetzt, geben in *abcde* und *abced* die ersten zwei vollen Variationen.

Drittes Kapitel.

Aufgaben über die Combinationslehre.

§. 107.

Combinationen.

1ste Aufgabe. Beim Lottospiele werden von 90 Nummern immer nur 5 gezogen; wieviel einfache Treffer, Amben, Ternen, Quaternen und Quinternen können unter diesen 5 Nummern seyn, und wieviel unter allen 90 Nummern?

Aufl. Die Frage könnte auch heißen: wieviel Combinationen ohne Wiederholungen sind zu je 1, zu je 2, zu je 3, zu je 4 und zu je 5 bei 5 u. bei 90 gegebenen Elementen möglich? Man würde also diese Frage mittelst der in §. 100 gegebenen Formeln beantworten können; nach diesen nämlich wären:

a) bei 5 Nummern, die Zahl der einfachen Treffer $= \frac{5}{1} = 5$

$$\text{die Zahl der Amben} = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10,$$

$$\text{die Zahl der Ternen} = \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 10,$$

$$\text{die Zahl der Quaternen} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 5 \text{ und}$$

$$\text{die Zahl der Quinternen} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 1.$$

b) bei 90 Nummern die Zahl der einfachen Treffer $= \frac{90}{1} = 90.$

$$\text{die Zahl der Amben} = \frac{90 \times 89}{1 \times 2} = 4005,$$

$$\text{die Zahl der Ternen} = \frac{90 \times 89 \times 88}{1 \times 2 \times 3} = 117480,$$

$$\text{die Zahl der Quaternen} = \frac{90 \times 89 \times 88 \times 87}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 2555190$$

$$\text{die Zahl der Quinternen} = \frac{90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 43949268$$

2te Aufgabe. Wie verhält sich die Wahrscheinlichkeit, das unter den gezogenen 5 Nummern ein einfacher Treffer, eine Ambe, Terne, Quaterne oder Quinterne seyn wird, zum Gegentheil?

Aufl. Die Wahrscheinlichkeit eines Dinges, oder vielmehr das Verhältniß des Wahrscheinlichen zum Gegentheil, kann durch einen Bruch dargestellt werden, dessen Zähler die Zahl der gleichmöglichen günstigen Fälle und dessen Nenner die Zahl aller möglichen Fälle angibt. Dieser Bruch wäre, vermöge Aufgabe 1, beim einfachen Treffer $\frac{5}{90}$, also die Wahrscheinlichkeit = 1:18, beim Ambenspiel $\frac{10}{4005}$, also die Wahrscheinlichkeit = 2:801, beim Ternenspiel = $\frac{10}{117480}$, also die Wahrscheinlichkeit = 1:11748, beim Quaternenspiel = $\frac{5}{2555190}$, also die Wahrscheinlichkeit = 1:511038, beim Quinternenspiel = $\frac{1}{43949268}$, also die Wahrscheinlichkeit = 1 : 43949268.

Anmerk. Die Anwendung der Combinationslehre auf die Wahrscheinlichkeits-Rechnung ist mannigfaltig; jedoch würde es dem Zwecke dieser Blätter entgegen seyn, mich ausführlicher über jene Lehre zu äußern. Wißbegierige finden darüber in de Bicquilley: die Rechnung des Wahrscheinlichen, aus dem Franz. übersetzt v. Rüdiger, Lpz. 1788, in Lorenz Lehrbegriff der Syntactik ꝛc., in D. J. Vaisz Berechnung des Möglichen und Wahrscheinlichen und andern Werken ausführliche Nachrichten.

3te Aufgabe. Die Dresdner privilegirte Klassenlotterie bestehet in 188800 Nummern oder Loosen; darunter befinden sich unter andern Gewinnen, 7 à 2000 Thlr., 40 à 1000 Thlr., 79 à 400 Thlr. und 251 à 200 Thlr.; wie verhält sich die Wahrscheinlichkeit einen dieser Gewinne zu bekommen, wenn der Spielende 8 Nummern besetzt?

Aufl. Es verhält sich die Wahrscheinlichkeit zum Gegentheil bei einem 2000 Thlr. Gewinn wie 7 : 23600, bei einem 1000 Tlr. Gewinn wie 1 : 590, bei einem 400 Thlr. Gewinn wie 79 : 23600 (fast wie 1 : 295) und bei einem 200 Thlr. Gewinn wie 251 : 23600 (fast wie 1 : 94).

4te Aufgabe. Wievielerlei Spiele können bei dem gewöhnlichen Solospiel, wo von 32 Karten 8 gegeben werden, vorkommen? Aufl. 10518300 Spiele.

5te Aufgabe. Wieviel Combinationen ohne Wiederholungen können aus den 8 Buchstaben *abcdefgh* zu je 5 gebildet werden; wieviel von diesen Combinationen fangen mit *a*, wieviel mit *ab*, wieviel mit *abc*, wieviel mit *abcd* und wieviel mit *abcde* an?

Aufl. Nach den, in den §§. 100 und 104 gegebenen Formeln ist 1) die Zahl aller Combinationen $= \frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5} = 56.$

Davon fangen 2) mit *a* an $\frac{5.6.7}{1.2.3} = 35$ (erste Klasse),

3) mit *ab* $\frac{4.5.6}{1.2.3} = 20$ (erste Ordnung),

4) mit *abc* $\frac{3.4.5}{1.2.3} = 10$ (erste Unterordnung),

5) mit *abcd* $\frac{2.3.4}{1.2.3} = 4$ (erste Unter-Unterordn.),

6) mit *abcde* $\frac{1.2.3}{1.2.3} = 1.$ (Vergl. hiermit T. IV)

6te Aufgabe. Angenommen, daß von den 59 Weidenarten, die Wildenow in seiner Wildenbaumzucht beschreibt, immer je zwei von verschiedenen Arten, und zwar eine männliche und eine weibliche, fruchtbaren Samen hervorbrächten, aus welchen sich Bastardarten erziehen ließen; wieviel solcher Varietäten würden entstehen können. Antw. $\frac{59 \times 58}{1 \times 2} = 1711.$

7te Aufgabe. Wieviel Combinationen mit Wiederholungen sind zu je 6 der gegebenen 9 Buchstaben *abcdefgh* u. *i* möglich? wieviel derselben werden mit *a*, wieviel mit *b*, wieviel

mit *g*, wieviel mit *aa*, wieviel mit *ag*, wieviel mit *aaa*, wieviel mit *aaf*, wieviel mit *aaaa*, wieviel mit *aaag* und wieviel mit *aaaaa* anfangen?

Aufl. Nach §. 100 ist die Zahl aller Combinationen $= \frac{6\times7\times8\times9\times10\times11\times12\times13\times14}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9} = 2002$. Nach §. 104 ist die Zahl der Combinationen der ersten Klasse, nämlich die der *a*, $= 1287$; die der zweiten Kl., nämlich *b*, $= 792$; die der 7ten Kl., nämlich *g*, $= 21$; die der ersten Ordnung, nämlich *aa*, $= 495$; die der 7ten Ordn., näml. *ag*, $= 15$; die der ersten Unterordnung, näml. *aaa*, $= 165$; die der 6ten UO., nämlich *aaf*, $= 20$; die der ersten U.UO., näml. *aaaa*, $= 45$; die der 7ten U.UO., näml. *aaag*, $= 6$, und die der ersten U.U.UO., nämlich *aaaaa*, $= 9$.

8te Aufgabe. Wenn die vier und zwanzigerlei Arten der ganzen Sträucher, die der Herr von Burgsdorf in seinem Forsthandbuche aufführt, zu je 6 so mit einander in Reihen gesetzt würden, daß daraus alle mögliche Verbindungen mit Wiederholungen statt fänden; wieviel solcher Reihen würde man erhalten? und wieviel Pflanzen wären im Ganzen erforderlich?

Aufl. Die Anzahl der Reihen $=$ der Anzahl der Combinationen zu je 6 mit Wiederholungen, also $= 475020$; jede Combination oder jede Reihe besteht aus 6 Pflanzen, also die Zahl der letzteren $= 2850120$.

9te Aufgabe. Von funfzigerlei Saamenarten, von denen jedoch nur ein Körnichen jeder Art in einem Behälter ist, sollen 8 auf einmal blindlings herausgenommen werden; auf wieviel mögliche Arten kann dies geschehen? Antw. Auf 536878650erlei Art.

§. 108.

Permutationen.

1ste Aufgabe. Wie oft können 6, um einen Tisch herum sitzende Personen ihre Plätze dergestallt wechseln, daß sie jedesmal in einer andern Ordnung sitzen?

Aufl. Die Frage könnte auch heißen: wie oft können 6 Elemente permutirt werden? Antw. $6\times5\times4\times3\times2\times1=720$mal.

2te Aufgabe. Wievielerlei Zahlen (Complexionen) lassen sich aus den gegebenen vier Ziffern 1, 2, 3 und 4 bilden? wieviel der gebildeten Complexionen fangen mit 1, wieviel mit 2, mit 3 und mit 4 an?

Aufl. Ihre Zahl ist nach §. 101 $=24$, davon fangen nach §. 1056 mit 1, 6 mit 2, 6 mit 3 und 6 mit 4 an.

3te Aufgabe. Wieviel Complexionen lassen sich aus den 6 Ziffern 223335 bilden? wieviel der gebildeten Complexionen fangen mit 2, wieviel mit 3 und wieviel mit 5 an?

Aufl. Die Zahl aller Complexionen $=60$, davon fangen mit 2 an 20; 30 mit 3 und 10 mit 5. (§. 105.)

Die in vorstehender Aufgabe gegebenen Ziffern sind die einfachen Factoren der Zahl 540; das Product 540 kann also auf 60 verschiedene Arten aus den obigen Factoren gebildet werden.

4te Aufgabe. Wieviel von den, nach der vorigen Aufgabe gefundenen Complexionen werden mit 22, wieviel mit 33, wieviel mit 23, wieviel mit 35 und wieviel mit 235 anfangen?

Antw. 4 mit 22, 12 mit 33, 12 mit 23, 6 mit 35 und 3 mit 235 (§. 105). Denkt man sich in den letzten beiden Aufgaben $22 = bb$, $333 = aaa$ und $5 = c$, so hat man in Tab. VII eine bildliche Darstellung dieser Complexionen.

5te Aufgabe. Wieviel Complexionen erlauben die Größen $aaabbbbcc = a^3b^4c^2$ und wieviel der gebildeten Complexionen werden sich mit $a^3 = aaa$, wieviel mit $b^4 = bbbb$ und wieviel mit $c^2 = cc$ anfangen?

Antw. Die Zahl aller Complexionen $= 1260$, darunter werden sich anfangen mit a^3, $\frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1\times2\times1} = 15$, mit b^4, $\frac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times2\times1} = 10$, mit c^2, $\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1\times3\times2\times1} = 35$.

6te Aufgabe. Wieviel Complexionen gibt es unter der obigen 1260, wo a die vierte Stelle; wieviel gibt es, wo b die zweite Stelle, und wieviel, wo c die letzte Stelle einnimmt?

Aufl. Da jeder Buchstabe eine der n Stellen gleich vielmal einnimmt, so kann man sich auch denken, derselbe nähme die erste Stelle ein, oder bildete die Kolonne, folglich nimmt der Buchstabe a eine gewisse Stelle 420 mal, der Buchstabe b eine gewisse Stelle 560 mal und der Buchstabe c eine gewisse Stelle 280 mal ein.

§. 109.

Variationen.

1ste Aufgabe. Wieviel verschiedene Würfe sind mit 2, 3, 4 oder allgemein mit p Würfeln, deren jeder bekanntlich 6 verschieden bezeichnete Flächen hat, zu thun möglich?

Aufl. Die Frage könnte auch heißen: auf wievielerlei Art können von den 6 verschiedenen Flächen, die jeder Würfel hat, Variationen mit Wiederholungen zu je 2, 3, 4 oder je p gebildet werden? Nach §. 103 ist die Anzahl dieser Variationen, mit 2 Würfeln $= 6^2 = 36$, mit 3 Würfeln $= 6^3 = 216$, mit 4 Würfeln $= 6^4 = 1296$ und mit p Würfeln $= 6^p$.

2te Aufgabe. Wievielmal können unter den 6^p verschiedenen Würfen solche vorkommen, wo p mal, $p-1$ mal, $p-2$ mal, ... 1 mal eine bestimmte Zahl, z. B. die 4, hervorkommt?

Aufl. Wäre z. B. $p = 5$, so würde, wenn die 4 bei einem Wurfe auf allen 5 Würfeln oben seyn sollte, dies unter den ganzen $6^5 = 7776$ verschiedenen Würfen doch nur ein einziges mal statt haben können; sollte diese Zahl aber $p-1 = 4$ mal oben seyn, so könnte dieselbe 5 mal, nämlich zusammengesetzt mit einer der 5 Zahlen (die 4 als die 6 nicht mit gerechnet) des noch übrigen fünften Würfels vorkommen; eben so würde dies, wenn die 4 nur $p-2 = 3$ mal oben seyn sollte, $5 \times 4 = 20$ mal statt finden. Man dürfte nämlich nur Variationen für $6-1$

$=5$ Felder des Würfels, und zwar ohne Wiederholungen bilden, bei denen von der Formel des 103. §s. $m-n$ Glieder zu entwickeln wären, wo $m=5$ und $n=$ den Malen, die die bestimmte Zahl vorkommen soll. Es würde daher bei den 7776 Würfen eine bestimmte Zahl oben auf liegen können; 5 mal, wenn 4 Würfel diese Zahl zeigten; $5\times4=20$ mal, wenn 3 Würfel diese Zahl zeigten; $5\times4\times3=60$ mal, wenn 2 Würfel diese Zahl zeigten und $5\times4\times3\times2=120$ mal, wenn 1 Würfel dieselbe zeigte.

3te Aufgabe. Wieviel können aus 7 verschiedenen Farben Zusammensetzungen zu je dreien gemacht werden, jedoch so, daß keine Farbe mit sich selbst zusammengesetzt erscheint?

Antw. 168.

4te Aufgabe. Ein Forstbedienter wollte eine Anzahl Buchen- Ahorn- Eschen- Linden- und Ulmen-Pflänzlinge so verpflanzen, daß zwar in jeder Reihe alle 5 Holzarten, jedoch immer in verschiedener Ordnung zu stehen kämen; wieviel solcher Reihen würden erforderlich seyn, wenn diese Holzarten in allen nur möglichen verschiedenen Zusammensetzungen zu je 5 verpflanzt würden; wieviel von diesen Reihen würden darunter seyn, wo der Ahorn die erste, wieviel wo die Buche die erste Pflanze wäre u. s. w., wieviel würden von jeder Sorte und wieviel überhaupt Pflänzlinge nöthig seyn?

Aufl. Es wären 120 Reihen erforderlich, weil jede Reihe eine Variation bildet; davon würden 24 mit einer gewissen Holzart, z. B. der Buche, anfangen; im Ganzen wären $120\times5=600$ Pflänzlinge und von jeder Sorte 120 erforderlich.

5te Aufgabe. Ein Forstbedienter wollte 3360 Pflänzlinge, bestehend aus siebenerlei Holzarten, so verpflanzen, wie es in der vorigen Aufgabe angegeben ward; wieviel wird derselbe in eine Reihe (Variation) setzen müssen, und wieviel solcher Reihen fangen mit einer gewissen Holzart, z. B. der Esche, an?

Aufl. Hier ist das n der Formel unbekannt; man bilde

daher nur einige Glieder der Formel des §s. 102, dividire mit dem, dadurch erhaltenen Producte in die oben angegebene Zahl und fahre mit Bilden der Glieder und der Division so lange fort, bis man mittelst letzter einen ganzen Quotienten erhält, der nicht größer als 7 ist. Hier würde, wenn erst bei der Division mit den ersten 4 Gliedern $= 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ ein Quotient $= 4$ erhalten würde, dieser Quotient die Zahl der Pflänzlinge einer Reihe, 840 aber die Zahl aller Reihen und 7 die Zahl der Reihen, so mit einer gewissen Holzart anfangen, angeben.

6te Aufgabe. Wieviel können aus den 24 Buchstaben des Alphabets, Wörter, deren jedes aus 6 Buchstaben bestehet, in welchen jedoch keiner mehr als einmal vorkommen darf, gebildet werden?

Aufl. 96909120, theils aussprechbare, theils unaussprechbare Wörter (Variationen ohne Wiederholungen zu je 6 der 24 Elemente).

Siebenter Abschnitt.

Der binomische und polynomische Lehrsatz.

Erstes Kapitel.

Erklärungen und Formeln.

§. 110.

Unter dem binomischen Lehrsatz versteht man die von Newton zuerst bestimmte algebraische Formel, welche die Gesetze angibt, nach welchen jede Potenz einer zweigliedrigen Größe, z. B. des Binomiums $x + a$ gebildet wird, ohne vorher die niedrigern Potenzen dieser Größe zu entwickeln. Eben so können mittelst dieser Formel, die Wurzeln aus höheren Potenzen, als die dritte ist, gezogen werden. Wird die Größe als mehrgliedrig angesehen, so erhält die zu gleichem Zwecke, als der für die zweigliedrige war, entwickelte Formel den Namen des polynomischen Lehrsatzes.

§. 111.

Die allgemeine Formel für die $m$te Potenz eines Binomiums $x + a$ ist:

$$(x \pm a)^m = x^m \pm \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2}$$
$$\pm \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{m-3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4) \ldots \times 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots m} a^m$$

Von den beiden Zeichen $\pm$ gilt $+$ für alle Glieder, wenn beide Theile des Binomiums positiv; hingegen nur für die ungeraden (1te, 3te, 5te .. $2n+1$te), wenn ein Theil der gegebenen Größe (gleichviel welcher) negativ ist. Sind beide Theile negativ, so erhalten alle Glieder das Zeichen $+$, wenn m gerad, d. h. von der Form $2n$, und $-$, wenn dasselbe ungerad ist.

Betrachtet man diese Formel, so fallen folgende Gesetze ins Auge.

1) Die Zahl der Glieder ist bei selbiger um 1 größer, als der Exponent m der Potenz, auf welche das Binom erhoben werden soll.

2) Das erste Glied besteht aus dem ersten Theile des Binoms in der $m$ten Potenz mit dem Coefficienten 1, und das letzte Glied besteht aus dem zweiten Theile des Binoms, ebenfalls in der $m$ten Potenz mit dem Coefficienten 1.

3) In jedem folgenden Gliede der Formel steht der erste Theil des Binoms immer in einer um 1 niedrigern Potenz als in dem vorhergehenden Gliede; der zweite Theil aber in einer um 1 höhern Potenz. Die Exponenten beider Theile zusammen sind in jedem Gliede $= m$; man kann sich daher das erste Glied als aus $a^o x^m$, und das letzte aus $x^o a^m$ bestehend, vorstellen. Der Exponent des zweiten Theils ist ferner in jedem Glieder $= n-1$, wenn n die Zahl der Glieder bezeichnet; also der des ersten Theils $= m - (n-1) = m - n + 1$.

4) Die Coefficienten — in Zahlen entwickelt — steigen bis zur Mitte und nehmen von da an in derselben Ordnung wieder ab, so daß die Coefficienten von je 2 Gliedern, deren eins so weit von dem ersten als das andre von dem letzten Gliede der Formel entfernt steht, gleich sind. Ist m eine gerade Zahl, so ist der Coefficient des mittelsten Gliedes der größte; ist m ungerad, so sind die Coefficienten der zwei Mittelglieder gleich.

5) Die Coefficienten werden durch die Zahl der Combinationen ohne Wiederholungen bestimmt. Die Zahl der Elemente der-

selben ist = m = den Exponenten der Potenz, auf welche das Binom erhoben werden soll; n aber ist = der Zahl der Glieder weniger 1, vom ersten Gliede bis zu dem gezählt, für welches der Coefficient berechnet werden soll, oder = dem Exponenten, den der zweite Theil des Binoms in diesem Gliede hat; es ist also beim zweiten Gliede $n = 1$, beim dritten $n = 2$ u. s. w.

6) Zu diesen sonach bestimmten Coefficienten dürfen nur der erste und zweite Theil des Binoms mit dem nach 3 gebildeten Exponenten gesetzt werden, um jedes einzelne Glied der Formel für sich zu entwickeln.

§. 112.

Jedes Polynom kann man sich als ein Binom vorstellen (§. 72), wenn man den ersten Buchstaben des Polynoms als den ersten Theil, alle nach dem ersten noch folgende Buchstaben aber als den zweiten Theil betrachtet. Bezeichnen wir nämlich bei dem Polynom $(x + h + g + f \ldots + a)^m$, das aus n Theilen bestehen soll, die Theile $h + g + f \ldots + a$ (nämlich $n-1$ der gegebenen n Theile) mit p, so ist: $(x \pm p)^m =$

$$x^m \pm \frac{m}{1} p x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} p^2 x^{m-2} \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$p^3 x^{m-3} \ldots\ldots\ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\times 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m} p^m$$

die allgemeine Formel, nach welcher jedes Polynom von n Theilen zur $m$ten Potenz erhoben werden, oder umgekehrt, aus jeder $m$ten Potenz eines Polynoms die Wurzel gezogen werden kann.

Man könnte in jener Formel auch die $n-1$ ersten Buchstaben des Polynoms = p, den letzten Buchstaben a aber = x setzen. Die Formel selbst ist von der des Binoms nur dadurch verschieden, daß hier p eine mehrtheilige Größe ist, daher gelten auch für sie die im vorigen §. angeführten Gesetze.

Nennen wir alle Glieder der Formel, in welchen p erscheint, Producte, so müssen dieselben, als mehrtheilige Größen, bei

der endlichen Substitution des Werthes von p in Klammern gesetzt und mit ihren gemeinschaftlichen Factoren x^{m-1} bis x^0 versehen werden.

Alle diese Producte werden bei der Substitution wirklich gebildet, wenn man den Werth von p in diejenige Potenz erhebt, die dessen Exponent anzeigt. Die Coefficienten dieser Producte sind, wie bei dem binomischen Lehrsatze, Combinationen ohne Wiederlungen.

Will man keine Producte bilden, so betrachte man alle Theile (Buchstaben), woraus p besteht, als Elemente, von welchen Variationen mit Wiederholungen gebildet werden sollen, und bilde diese Variationen nach §. 106 zu je soviel, als der Exponent von p Einheiten anzeigt; zu jeder Variation wird sodann x mit seinem Exponenten und Coefficienten gesetzt. Der in der Formel angegebene Coefficient von x wird jedoch noch mit der Zahl der Variationen, die gleiche Producte bilden, multiplicirt. Wären z. B. die Variationen bc und cb vorhanden, so wären dies zwei gleiche Producte, folglich würde der Coefficient von x noch mit 2 zu multipliciren seyn. *

Anm. Vergleiche die erste der über den polynomischen Lehrsatz in §. 114 folgenden Aufgaben mit der zweiten; beide sind gleich, aber auf zweierlei Art berechnet.

Bedient man sich der zweiten Methode, so bemerke man noch Folgendes:

1) Die $m$te Potenz eines Polynoms von n Theilen hat $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3\ldots(n+m-1)}{1\ 2\ 3\ 4\ \ldots\ m}$ Glieder, nämlich soviel, als die Zahl der Combinationen mit Wiederholungen, die zu je m der n gegebenen Elemente gebildet werden können, besagt.

2) Die Summe der Exponenten aller in jedem einzelnen Gliede vorkommenden Buchstaben $= m$; daher kann, wenn eine Größe in einem Gliede in der $m$ten Potenz steht, außer ihr kein

andrer Buchstabe vorkommen. Ferner wird, wenn die höchste Potenz die $m-1$te, das Glied nur aus 2; wenn die höchste Potenz die $m-2$te, das Glied nur aus 2 oder 3; wenn die höchste Potenz die $m-3$te, das Glied nur aus 2, 3 oder 4; und wenn die höchste Potenz die $\frac{m}{2}$, dasselbe nur aus 2, 3, 4 oder $\frac{m-2}{2}$ Buchstaben bestehen können.

3) Jeder Buchstabe, aus welchem das Polynom besteht, kommt einmal in der $m$ten Potenz und mit dem Coefficienten 1 vor. Auf jeden Fall geschieht das Bilden der $m$ten Potenz eines Polynoms sicherer und auch leichter mittelst der ersten Methode, durch Bildung der Producte; jedoch tragen die obigen Angaben zur Kenntniß aller einzelnen Theile einer solchen Potenz bei und sind in dieser Hinsicht für den Anfänger nicht unwichtig.

Zweites Kapitel.

Aufgaben über den binomischen und polynomischen Lehrsatz.

§. 113.

Aufgaben über den binomischen Lehrsatz.

1) $(a-b)^4 = a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$

2) $(-a-b)^7 = -a^7-7a^6b-21a^5b^2-35a^4b^3-35a^3b^4-21a^2b^5-7ab^6-b^7$

3) $(1-b)^5 = 1-5b+10b^2-10b^3+5b^4-b^5$

4) $(3+2a)^4 = 81+216a+216a^2+96a^3+16a^4$

Bei Aufgaben, wo ein Theil des Binoms eine Zahl ist (wie in den zwei letzten), bilde man die Potenz erst nach der Formel, indem man die Zahl, gleich als ob es ein Buchstabe wäre, mit ihrem Exponenten und Coefficienten hinschreibt. Sind alle Glieder der Potenz nach der Formel dargestellt und hat man sich von der Richtigkeit derselben durch die in §. 111 angeführten Gesetze überzeugt, so mache man erst dann die angezeigten Potenzerhebungen und multiplicire dieselben mit den vorstehenden Coefficienten. Die

5te Aufgabe würde demnach erst also erscheinen:

$$3^4 + 4.2a.3^3 + 6.2^2a^2.3^2 + 4.2^3.a^3.3 + 2^4.a^4$$

Sind beide Theile des Binoms Zahlen, so wird mit ihnen auf gleiche Weise verfahren; doch können selbige auch durch zwei willkürlich angenommene Buchstaben bezeichnet, für letztere die Potenz entwickelt und endlich für die Buchstaben ihre Werthe substituiret werden. Dasselbe gilt auch von zusammengesetzten Größen. Die folgenden, doppelt gelösten Aufgaben zeigen das Verfahren deutlicher.

5) $(4a-3b)^7 = \begin{cases} 4^7a^7 - 7.4^6a^6 3b + 21.4^5a^5 3^2b^2 - 35. \\ 4^4a^4 3^3b^3 + 35.4^3a^3 3^4b^4 - 21 \\ .4^2a^2 3^5b^5 + 7.4a3^6b^6 - 3^7b^7 \\ 16384a^7 - 86016a^6b + 193536a^5b^2 - \\ 241920a^4b^3 + 181440a^3b^4 - \\ 81648a^2b^5 + 20412ab^6 - 2187b^7 \end{cases}$

6) $(14+3)^5 = \begin{cases} 14^5 + 5.14^4.3 + 10.14^3.3^2 + 10.14^2.3^3 + \\ 5.14.3^4 + 3^5 \\ 537827 + 576240 + 246960 + 52920 + 5670 \\ + 243 = 14198597 \end{cases}$

7) $\left(\frac{3ab}{2c} + \frac{c^2d}{3}\right)^6$; wenn $\frac{3ab}{2c} = x$ und $\frac{c^2d}{3} = y$ gesetzt wird, so ist diese Potenz $= x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$. Substituirt man für x und y die angenommenen Werthe, so ist

$$\left(\frac{3ab}{2c} + \frac{c^2d}{3}\right)^6 = \begin{cases} \frac{3^6a^6b^6}{2^6c^6} + \frac{6.3^5a^5b^5c^2d}{2^5c^53} + \frac{15.3^4a^4b^4c^4d^2}{2^4c^43^2} \\ + \frac{20.3^3a^3b^3c^6d^3}{2^3c^33^3} + \frac{15.3^2a^2b^2c^8d^4}{2^2c^23^4} + \\ \frac{6.3.abc^{10}d^5}{2c3^5} + \frac{c^{12}d^6}{3^6} \\ \frac{729a^6b^6}{64c^6} + \frac{243a^5b^5d}{16c^3} + \frac{135a^4b^4d^2}{16} + \\ \frac{5a^2b^2c^3d^3}{2} + \frac{5a^3b^3c^6d^4}{12} + \frac{abc^9d^5}{27} + \\ \frac{c^{12}d^6}{729}. \end{cases}$$

§. 114.

Aufgaben über den polynomischen Lehrsatz.

1) $(a+b+c)^4 = a^4+4a^3b+4a^3c+6a^2b^2+\underline{6a^2bc+6a^2cb}+6a^2c^2+4ab^3+\underline{4abbc+4abcb+4acbb+4abcc+4acbc+4accb}+4ac^3+b^4+\underline{bbbc+bbcb+bcbb+cbbb}+\underline{bbcc+bcbc+bccb+cbbc+cbcb+ccbb}+\underline{bccc+cbcc+ccbc+cccb}+c^4$

Die unterstrichenen Glieder sind Variationen und, wie es der Augenschein lehrt, gleiche Producte, die in der folgenden Auflösung derselben Aufgabe addirt sind.

2) $(a+b+c)^4 = a^4+4a^3b+4a^3c+6a^2b^2+12a^2bc+6a^2c^2+4ab^3+12ab^2c+12abc^2+4ac^3+b^4+4b^3c+6b^2c^2+4bc^3+c^4$.

3) $(a+b+c+d)^4 = a^4+4a^3(b+c+d)+6a^2(b^2+2bc+2cd+2bd+c^2+d^2)+4a(b^3+3b^2c+3b^2d+3bc^2+6bcd+3bd^2+c^3+3c^2d+3cd^2+d^3)+a^0(b^4+4b^3c+4b^3d$ u. s. w. bis zu Ende.

4) $\left(2a-3b-\frac{c}{2}\right)^3$. Man setze $2a = n$ und $-3b-\frac{c}{2} = p$, so erhält man $n^3+3n^2p+3np^2+p^3$, und für n u. p ihre Werthe gesetzt, gibt $8a^3+12a^2\left(-3b-\frac{c}{2}\right)+6a\left(9b^2+3bc+\frac{c^2}{4}\right)+a^0\left(-27b^3-\frac{27b^2c}{2}-\frac{9bc^2}{4}-\frac{c^3}{8}\right)$

6) $\left(\frac{3b^2}{a^2}+\frac{4a^2}{b}-2\right)^4 = 81b^8a^{-8}+108b^6a^{-6}(4a^2b^{-1}-2)+54b^4a^{-4}(16a^4b^{-2}-16a^2b^{-1}+4)+12b^2a^{-2}(64a^6b^{-3}-96a^4b^{-2}+48a^2b^{-1}-8)+a^0(256a^8b^{-4}-512a^6b^{-3}+384a^4b^{-2}-128a^2b^{-1}+16)$.

Drittes Kapitel.

Anwendung des binomischen und polynomischen Lehrsatzes bei Ausziehung der Wurzeln.

§. 115.

Ausziehung rationaler Wurzeln aus Buchstaben.

So wie im zweiten Kapitel des fünften Abschnittes die zweite Potenz eines Binoms die Formel abgab, nach welcher die Quadrat-

wurzel gezogen ward; eben so gibt die *m*te Potenz eines Binoms die Formel für Ausziehung der *m*ten Wurzel.

Man bilde sich daher diese Formel allemal nach den im vorigen Kapitel gegebenen Anweisungen, ordne hierauf die Größe, woraus die Wurzel gezogen werden soll nach §. 71 und 72 so, daß der Buchstabe, nach welchem man ordnete, mit dem höchsten Exponenten als erstes Glied stehet. Aus diesem ersten Gliede zieht man die Wurzel dadurch: daß man dieselbe aus dem Coefficienten mittelst des, am Schlusse dieses §en. befindlichen Täfelchens zieht, die Exponenten dieses Gliedes aber durch den Wurzelexponenten dividirt; so hat man den ersten Theil der Wurzel; diesen wieder zu *m*ten Potenz erhoben, bringt das erste Glied auf 0. Erhebt man diesen ersten Theil zur *m*—1ten Potenz und multiplicirt denselben hierauf mit dem Wurzelexponenten *m*, so gibt das Product den Divisor des folgenden Gliedes (das 2*a* im §. 71), und durch Ausübung dieser Division erhält man in dem Quotienten den zweiten Theil der Wurzel. Nun bilde man aus beiden bekannten Theilen alle Producte, die die Formel angibt und ziehe solche von der gegebenen Größe ab. Bleibt noch ein Rest, so zeigt dies an: daß die Wurzel entweder irrational ist oder aus mehr als zwei Theilen besteht. Auf jeden Fall betrachte man nun die zwei gefundenen Theile als dem ersten und verfahre mit ihnen wie eben gelehrt ward. Ist die Wurzel irrational, so werden die immer größer bleibenden Reste dies bald anzeigen.

Anfänger werden das Analoge der gegebenen Regeln mit denen der §§en. 71, 72 und 77 einsehen und die Anwendung der Formeln bei den folgenden zwei Aufgaben, verglichen mit der, bei jenen §§en. nicht schwierig finden.

Wurzeln. / Potenzen.	2	3	4	5	6	7	8	9
4	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
5	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049
6	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441
7	128	2187	16384	78125	279936	823543	2097152	4782969
8	256	6561	65536	390625	1679616	5764801	16777216	43046721
9	512	19683	262144	1953125	10077696	40353607	134217728	387420489

1ste Aufg. $\sqrt[5]{243a^5c^5 - 810a^4c^4bd + 1080a^3c^3b^2d^2}$

$243a^5c^5 - 810a^4c^4bd + 1080a^3c^3b^2d^2$

$- \quad + \quad -$

(Divisor) $5.3^4a^4c^4$

$-720a^2c^2b^3d^3 + 240acb^4d^4 - 32b^5d^5 = 3ac-2bd$

$-720a^2c^2b^3d^3 + 240acb^4d^4 - 32b^5d^5$

$+ \quad - \quad +$

Die Formel ist hier $x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$ Die ersten zwei Glieder der gegebenen Größe werden dadurch auf Null gebracht, daß man den ersten Theil der Wurzel wieder zur 5ten Potenz erhebt, den Divisor $5 \times 3^4a^4c^4 = 405a^4c^4$ aber mit dem gefundenen zweiten Theile multiplicirt und beide Producte abzieht. Nun käme in der Formel das Glied $10x^3a^2$; da hier $x = 3ac$ und $a = -2bd$, so wäre $10x^3a^2 = 10(3ac)^3 \times (-2bd)^2 = 1080a^3c^3b^2d^2$; dieses abgezogen bringt auch das dritte Glied auf Null. Eben so wäre das $10x^2a^3$ der Formel $= 10(3ac)^2 \times (-2bd)^3 = -720a^2c^2b^3d^3$, das $5xa^4$ der Formel $= 5(3ac) \times (-2bd)^4 = 240acb^4d^4$ und das a^5 der Formel $= (-2bd)^5 = -32b^5d^5$; alle diese Producte von der gegebenen Größe abgezogen, bringt solche auf Null.

2te Aufgabe. $\sqrt[4]{[81b^8a^{-8} + 108b^6a^{-6}(4a^2b^{-1} - 2) + 54b^4a^{-4}(16a^4b^{-2} - 16a^2b^{-1} + 4) + 12b^2q^{-2}(64a^6b^{-3} - 96a^4b^{-2} + 48a^2b^{-1} - 8) + 256a^8b^{-4} - 512a^6b^{-3} + 384a^4b^{-2} - 128a^2b^{-1} + 16]} = 3b^2a^{-2} + 4a^2b^{-1} - 2 = \frac{3b^2}{a^2} + \frac{4a^2}{b} - 2.$

Bei Ausziehung der Wurzel eines Polynoms ordne man die Größe so, wie es hier angezeigt ist; nämlich man setze die gleichen Factoren in eine Klammer, und den gemeinschaftlichen davor; so erhält man durch die erste Division mit $(3b^2a^{-2})^3 \times 4 = 108 b^6a^{-6}$ in den Quotienten $4a^2b^{-1} - 2$ gleich alle noch fehlende Theile der Wurzel und kann daher, wenn man in der Formel für

das Binom, $a =$ diesen Theilen setzet (hier $= 4a^2b^{-1} - 2$), das Ausziehen nach den bei voriger Aufgabe umständlicher gezeigten Verfahren vollenden.

Der Anfänger kann auf die in den vorigen zwei §§en. gelösten Aufgaben die Proben durch das Ausziehen der Wurzeln machen, wenn derselbe den Gegenstand mehr einüben will.

§. 116.

Ausziehung rationaler Wurzeln aus Zahlen.

Auch hier wird auf ähnliche Weise, wie in den §§en. 73 bis 76 und 78 bis 80 verfahren. Nur bemerke man noch: daß die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Klassen eingetheilt werden muß, deren jede (die erste zur Linken ausgenommen), soviel Ziffern heben muß, als der Wurzelexponent Einheiten enthält. Soviel Klassen aber abgeschnitten werden, aus soviel Ziffern besteht auch die Wurzel. Aus der ersten Klasse zieht man mittelst des, am Schlusse vorigen des §s. angezeigten Täfelchens die Wurzel; so hat man den ersten Theil. Die Potenz dieser Wurzel zieht man von der ersten Klasse ab und setzt zu dem Rest die erste Ziffer der nächstfolgenden Klasse. In diese Zahl dividirt man mit dem in die $m-1$ste Potenz erhobenen und mit m multiplicirten, bekannten ersten Theil ($m =$ dem Wurzelexponenten), so erhält man den zweiten Theil der Wurzel. Die Producte bildet man nach der Formel und setzt vor dem Abziehen jedes Productes immer eine Zahl von der, bei der Division angegriffenen Klasse zu dem, bei der vorherigen Subtraction gebliebenen Rest. Besteht die Wurzel aus mehr als 2 Ziffern, so bestimme man die folgenden Theile derselben auf gleiche Art, indem man die schon gefundenen Ziffern immer als den ersten Theil (das x der Formel) betrachtet (§. 72).

1ste Aufgabe. $\sqrt[5]{5507} \mid 31776 \mid = 56$

$5^5 = 3125 \mid$

$5 \cdot 5^4 = 3125$:	23823
$6 \cdot 3125 =$	18750
	50731
$10 \cdot 5^3 \cdot 6^2 =$	45000
	57317
$10 \cdot 5^2 \cdot 6^3 =$	54000
	33177
$5 \cdot 5 \cdot 6^4 =$	32400
	7776
$6^5 =$	7776

2te Aufgabe. $\sqrt[4]{161568625936} = 634$

3te Aufgabe. $\sqrt[6]{646990183449} = 93$

4te Aufgabe. $\sqrt[5]{4984209207} = 87$

§ 117.

Ausziehung irrationaler Wurzeln.

Man setze $\sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{(a^m \pm b)}$, so daß $x = a^m \pm b$ jede beliebige einfache oder zusammengesetzte Größe vorstellen kann, die jedoch von der Beschaffenheit angenommen werden muß: daß a^m eine rationale Wurzel gibt (hier $= a$). Dieser Theil kann jedoch selbst $= 1$ seyn, und sowohl positiv als negativ, wenn m ungerad; aber blos positiv, wenn m gerad ist. Bei Zahlen muß aber b stets kleiner als a, und zwar so klein als möglich angenommen werden, damit die Glieder der folgenden Reihe desto schneller zusammenlaufen (sich der Null mehr nähern).

Setzt man nun die obige Größe in Klammern und gibt derselben einen Bruchexponenten, der die Einheit zum Zähler, den Wurzelexponenten aber zum Nenner hat, und entwickelt diese Potenz nach §. 113, so erhält man $\sqrt[m]{(a^m \pm b)} = (a^m \pm b)^{\frac{1}{m}}$

Dabei ist

das x^m der Formel $= (a^m)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{m}{m}} = a$

$$= \pm\frac{m}{1}ax^{m-1} = \pm\frac{m}{1}b(a^m)^{\frac{1}{m}-1} = \pm\frac{m}{1}ba^{1-m} = \pm\frac{mb}{a^{m-1}}$$

$$= +\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2x^{m-2} = +\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}b^2(a^m)^{\frac{1}{m}-2} =$$

$$\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}b^2a^{1-2m} = +\frac{m(m-1)b^2}{1\cdot 2\cdot a^{2m-1}}$$

$$= \pm\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3x^{m-3} = \pm\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}b^3(a^m)^{\frac{1}{m}-3}$$

$$= \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}b^3a^{1-3m} = \pm\frac{m(m-1)(m-2)b^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot a^{3m-1}}$$

$$= +\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^4x^{m-4} =$$

$$\pm\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}b^4(a^m)^{\frac{1}{m}-4} =$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}b^4a^{1-4m}$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)b^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot a^{4m-1}}$$ u. s. w.

Wäre z. B. $m = 2$, so wäre $\sqrt[m]{(a^m \pm b)} = (a^2 \pm b)^{\frac{1}{2}}$

$$= a \pm \frac{b}{2a} - \frac{b^2}{2.4a^3} \pm \frac{1\cdot 3b^3}{2.4\cdot 6a^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot b^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8a^7}$$

$$\pm\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7b^5}{2.4.6.8.10a^9}$$ ꝛc., und man erhielte in der hier entwickelten Reihe die Formel zur Ausziehung der Quadratwurzel aus einer irrationalen Größe, die sich auf die Form $a^2 \pm b$ bringen ließ.

Wäre $m = 3$, so wäre $\sqrt[3]{(a^3 \pm b)} = (a^3 \pm b)^{\frac{1}{3}} =$

$$a \pm \frac{b}{3.a^2} - \frac{2.b^2}{2.3^2.a^5} \pm \frac{2.5.b^3}{2.3.3^3.a^8} - \frac{2.5.8b^4}{2.3.4.3^4.a^{11}} \pm$$

$$\frac{2.5.8.11.b^5}{2.3.4.5.3^5.a^{14}}$$ ꝛc. die Formel zur Ausziehung der Cubikwurzel aus einer Irrationalgröße, die sich auf die Form $a^3 \pm b$ bringen

ließ. Und so kann man für jede beliebige Potenzwurzel die Formel entwickeln, wenn man in die allgemeine Formel für m den Exponenten der Potenz setzt und dabei alle mögliche Reductionen anbringt.

Man gelangt mittelst dieser Formeln bei Ausziehung irrationaler Wurzeln aus Zahlen oft weit schneller zum Ziel, als nach §. 79 und 80, wie dies die folgenden Aufgaben zeigen; doch muß man, wie schon erwähnt, b stets so klein als möglich (positiv oder negativ, wie es der Zweck erfordert,) anzunehmen suchen.

1ste Aufgabe. $\sqrt{37} = \sqrt{36+1} = 6 + \frac{1}{2.6} - \frac{1^2}{2.4.6^3} + \frac{1.3.1^3}{2.4.6.6^5} - \ldots = 6 + \frac{1}{12} - \frac{1}{1728} + \frac{3}{373248} - \ldots = 6{,}08276266718\ldots$ Diese Wurzel ist bis auf die 8te Decimalstelle ganz genau.

2te Aufgabe. $\sqrt[3]{214} = \sqrt[3]{216-2} = \sqrt[3]{6^3-2} = 6 - \frac{2}{3.6^2} - \frac{2.2^2}{2.3^3.6^5} - \frac{2.5.2^3}{2.3.3^3.6^8}\ldots = 5{,}9814240316\ldots$

Diese Wurzel erhielte man schon durch Entwickelung des zweiten Gliedes bis auf die 5te Decimalstelle richtig, und durch Entwickelung des dritten Gliedes bis auf die 7te Stelle genau.

3te Aufgabe. $\sqrt[6]{117652} = \sqrt[6]{117649+3} = \sqrt[6]{7^6+3} = 7 + \frac{3}{6.7^5} - \frac{5.3^2}{2.6^2.7^{11}} + \frac{5.11.3^3}{2.3.6^4.7^{17}} \ldots = 7{,}000029749193049 78\ldots$ Diese Wurzel erhielt man schon durch Entwickelung des zweiten Gliedes bis auf die 10te Decimalstelle genau.

4te Aufgabe. $\sqrt[4]{0{,}6566} = \sqrt[4]{0{,}6561+0{,}0005} = \sqrt[4]{0{,}9^4+0{,}0005} = 0{,}900171386095\ldots$ (wenn man 4 Glieder der Reihe entwickelt).

Streit gibt im 4ten Theile seines Lehrbuchs der reinen Mathematik §. 379 eine Formel, mittelst welcher man bei Ausziehung der $m$ten Wurzel aus einer beliebigen irrationalen Größe x

einen Bruch f bestimmen kann, der zu dem bereits gefundenen Theile w, der Wurzel, addirt, letztere sehr genau gibt. Es ist nämlich

$$f = \frac{2w(x - w^m)}{w^m(m+1) + x(m-1}$$

Zur Erläuterung dieser Formel stehen folgende zwei Aufgaben.

1) Man bestimme $\sqrt[3]{325}$ möglichst genau.

Aufl. Nach §. 80 ist $\sqrt[3]{325} = 6{,}8753 = w$; also

$$f = \frac{2 \times 6{,}8753(325 - 6{,}8743^3)}{6{,}8753^3(3+1) + 325(3-1} =$$

$$\frac{2 \times 6{,}8753(325 - 324{,}99371279377)}{2(6{,}8753^3 \times 2 + 325)} =$$

$$\frac{6{,}8753 \times 0{,}006287206223}{974{,}987425587554} = 0{,}000044335370 7\ldots \text{ also}$$

$$\sqrt[3]{325} = 6{,}8753 + 0{,}000044335370 7\ldots =$$
$$6{,}875344335370 7\ldots$$

2) $\sqrt[5]{237}$ ist?

Aufl. Nach §. 116 ist $\sqrt[5]{237} = 2{,}98\ldots = w$, also

$$f = \frac{2 \times 2{,}98(237 - 2{,}98^5)}{2{,}98^5(5+1) + 237(5-1)} = \frac{2 \times 2{,}98(237 - 2{,}98^5)}{2(2{,}98^5 \times 3 + 237 \times 2)}$$

$$= \frac{2{,}98\ 237 - 235{,}0072823968)}{3 \times 235{,}0072823968 \times 2 \times 237} =$$

$$\frac{2{,}98 \times 1{,}9927176032}{1179{,}0218471904} = 0{,}00503663\ldots, \text{ also}$$

$$\sqrt[5]{237} = 2{,}98 + 0{,}00503663\ldots = 2{,}98503663\ldots$$

Achter Abschnitt.

Arithmetische und geometrische Progressionen und Logarithmen.

---

§. 118.

Wenn mehrere Größen nach einem gewissen Gesetze zu- oder abnehmen, so werden dieselben eine Progression oder Reihe genannt, und zwar im ersteren Falle eine steigende, im letzteren eine fallende. Die Größen selbst aber heißen die Glieder der Reihe und werden durch ihren Stand als das 1ste, 2te 3te, $n-1$ste oder letzte Glied der Reihe unterschieden, wenn die Anzahl aller Glieder $=n$. Eine stätige Proportion (§. 45—51) von mehr als drei Gliedern, bildet daher eine Reihe, weil bei ihr jedes folgende Glied in demselben Verhältnisse größer oder kleiner wird, als das angenommene im Verhältniß gegen das vorhergehende größer oder kleiner ward.

Ist die Anzahl der Glieder einer Reihe bekannt, oder läßt sich die Zahl derselben wenigstens bestimmen, so heißt die Reihe eine endliche; laufen aber die Glieder nach den einmal bekannten Gesetze ohne Ende fort, so daß die Anzahl ihrer Glieder unendlich groß wird, so heißt die Reihe eine unendliche. Ist einmal das Gesetz bekannt, nach welchem die Glieder einer Reihe zu- oder abnehmen, so kann man die Reihe nach Belieben fort-

setzen, nämlich soviel Glieder derselben entwickeln als man will. Die Summe einer jeden Reihe erhält man durch Addition aller Glieder; daß diese Addition sehr weitläuftig werden würde, und eben so die ihr vorhergehende Entwickelung aller Glieder einer Reihe, bedarf wohl keines Beweises. Man hat daher mit Hülfe der Algebra, aus den Gesetzen, die bei Bildung der Reihen gelten, Formeln gefunden, mittelst welcher alle Aufgaben, die durch Anwendung der Reihen zu lösen möglich sind, aufgelöst werden können.

Eine Reihe heißt convergirend oder zusammenlaufend, wenn ihre Glieder immer mehr sich der Null nähern, nämlich immer kleiner werden; und divergirend, wenn ihre Glieder immer größer werden; daß erstere eine fallende, letztere eine steigende Reihe ist, bedarf kaum der Erwähnung.

Wird das Gesetz einer Reihe durch Addition oder Subtraction bestimmt, so heißt die Reihe eine arithmetische; wird dasselbe aber durch Multiplication oder Division bestimmt, so heißt dieselbe eine geometrische Reihe.

Erstes Kapitel.

Von den arithmetischen Reihen.

§. 119.

Wenn man bei einer Reihe durch das Abziehen eines jeden Gliedes von seinem nächstfolgenden gleiche Differenzen erhält, so heißt dieselbe eine arithmetische, Reihe der ersten Ordnung. Eine solche Reihe ist z. B. 6, 8, 10, 12 ꝛc. die oder natürliche Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. Die Größe, die man durch dieses Abziehen erhält, heißt die Differenz oder der Unterschied (=2 in dem ersten = 1 in dem zweiten Beispiel). Durch sie wird das Gesetz der Reihe bestimmt, und man kann die Reihe auf beiden Seiten durch Bildung neuer Glieder verlängern,

wenn man diese Differenz bei dem letzten Gliede und bei jedem darauf folgenden addirt, bei dem ersten und bei jedem darauf folgenden Gliede (zur Linken) aber subtrahirt. Diese Addition und Subtraction zu Bildung von 8 neuen Gliedern bei der oben gegebenen Reihe angewandt, würde selbige also geben:

— 2, 0, + 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20.

Erhält man durch das Abziehen das erstemal keine gleichen Differenzen, sondern erst dann, wenn von den erhaltenen Differenzen wieder jede von der nächstfolgenden abgezogen wird, so heißt die Reihe eine der zweite Ordnung; und so würde man eine Reihe der dritten Ordnung erhalten, wenn man erst beim drittenmal Abziehen gleiche Differenzen erhielte. Als Beispiel steht unter A eine Reihe der 2ten und unter B eine der 3ten Ordnung.

A

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 . . .
1ste Differenz 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15
2te Differenz = 2, 2, 2, 2, 2, 2,

B

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512 . . .
1ste Differenz 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169
2te Differenz 12, 18, 24, 30, 36, 42
3te Differenz = 6, 6, 6, 6, 6,

Man sieht aus diesen Beispielen, daß bei einer Reihe der ersten Ordnung 2 Glieder oder nur 1 Glied und die Differenz, bei einer Reihe der zweiten Ordnung 3 oder nur 2 Glieder und die gleiche Differenz, bei einer Reihe der dritten Ordnung 4 oder nur 3 Glieder und die gleiche Differenz und bei einer Reihe der $m$ten Ordnung $m+1$ oder nur m Glieder und die gleiche Differenz bekannt seyn müssen, um die Reihe beliebig fortsetzen zu können.

Wären nun bei einer Reihe der $m$ten Ordnung $m+1$ Glieder bekannt, so findet man die folgenden: wenn man die Diffe-

renzen zwischen den gegebenen Gliedern aufsucht, von diesen wiederum die Differenzen u. s. f. bis man zuletzt eine Zahl (die gleichbleibende Differenz) erhält, diese letztere zu der letzten Differenz der vorhergehenden Ordnung und diese Summe wiederum zu der letzten Differenz der vorhergehenden Ordnung addirt u. s. f., bis man die erhaltene Summe zu dem $m+1$sten Gliede addirt, um das $m+2$te in der Summe zu erhalten. Sollte z. B. bei der Reihe B noch ein Glied entwickelt werden, so wäre, — da die Zahl 6 die gleichbleibende, 42 die nächst vorhergehende, und 169 die dieser vorhergehende Differenz, 512 aber das $m+1$ste Glied ist, — das $m+2$te Glied $= 6+42+169+512 = 729$.

§. 120.

Bezeichnet a das erste, t das letzte Glied, d die Differenz, n die Zahl der Glieder und s die Summe einer jeden arithmetischen Reihe der 1sten Ordnung; so ist

1) $t = a + (n-1)\,d$ und

2) $s = \frac{an+tn}{2}$; oder anstatt t seinen durch 1 dargestellten Werth gesetzt, gibt $s = \frac{n}{2}[2a + d\,(n-1)]$.

Mittelst dieser beiden Grundformeln lassen sich die Werthe von s und t bestimmen; wenn die von a, d und n bekannt sind. Ueberhaupt lassen sich, wenn von den, bei jeder arithmetischen Reihe des ersten Ranges vorkommenden 5 Größen a, t, d, n und s dreie bekannt sind, die übrigen zwei durch Reduction der obigen zwei Grundformeln bestimmen. Diese Reductionen auf alle nur denkbar vorkommende Fälle schon gemacht, enthält die nachstehende Tafel.

Nr	Gegeben.			Gesucht.	Formeln.
1	a	d	n		$t = a + (n-1)d$
2	a	d	s		$t = -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{[2ds + a - \frac{1}{2}d)^2]}$
3	a	n	s	t	$t = \frac{2s}{n} - a$
4	d	n	s		$t = \frac{s}{n} + \frac{(n-1)d}{2}$
5	a	d	n		$s = \frac{1}{2}n[2a + (n-1)d]$
6	a	d	t		$s = \frac{a+t}{2} + \frac{(t+a)(t-a)}{2d}$
7	a	n	t	s	$s = \frac{1}{2}n(a+t)$
8	d	n	t		$s = \frac{1}{2}n[2t-(n-1)d]$
9	a	n	t		$d = \frac{t-a}{n-1}$
10	a	n	s		$d = \frac{(2s-2an)}{n(n-1)}$
11	a	t	s	d	$d = \frac{(t+a)(t-a)}{2s-t-a}$
12	n	t	s		$d = \frac{2(nt-2s)}{n(n-1)}$
13	a	d	t		$n = 1 + \frac{t-a}{d}$
14	a	d	s		$n = \frac{d-2a}{2d} \pm \sqrt{\left[\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2\right]}$
15	a	t	s	n	$n = \frac{2s}{a+t}$
16	d	t	s		$n = \frac{2t+d}{2d} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{2t+d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}\right]}$
17	d	n	t		$a = t - (n-1)d$
18	d	n	s		$a = \frac{s}{n} - \frac{(n-1)d}{2}$
19	d	t	s	a	$a = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{[(t+\frac{1}{2}d)^2 - 2ds]}$
20	n	t	s		$a = \frac{2s}{n} - t$

§. 121.

Die Bestimmung des letzten Gliedes t und der Summe s einer Reihe der 2ten, 3ten, 4ten oder $m$ten Ordnung geschieht mittelst der, in nachstehender Tafel enthaltenen Formeln, bei denen jedoch die Werthe von p, q, r, u u. s. w. erst nach folgender Anweisung bestimmt werden müssen.

Rang der Reihe.	$t =$	$s =$
1	$pn+q$	an^2+bn
2	pn^2+qn+r	an^3+bn^2+cn
3	pn^3+qn^2+rn+u	$an^4+bn^3+cn^2+dn$
4	$pn^4+qn^3+rn^2+sn+u$	$an^5+bn^4+cn^3+dn^2+en$
m	$pn^m+q^{m-1}\ldots.yn+z$	$an^{m+1}+bn^m+cn^{m-1}hn..$

Wäre z. Beispiel bei folgender Reihe des dritten Ranges 3, 5, 9, 16, 27, das $10=n$te Glied t und die Summe s zu suchen, so setze man in die für Reihen dieser Ordnung gegeben Formeln erst $n=1$, dann $n=2$, dann $n=3$ und endlich $n=4$ und die dadurch erhaltenen 4 Werthe = dem 1sten, 2ten, 3ten und 4ten Gliede. Man erhält dadurch, um t zu bestimmen, die folgenden 4 Gleichungen:

1) $p+q+r+u=3$
2) $8p+4q+2r+u=5$
3) $27p+9q+3r+u=9$ und
3) $64p+16q+4r+u=16$.

Diese nach §. 63 reducirt, gibt $p=\frac{1}{6}$, $q=0$, $r=\frac{5}{6}$ und $u=2$. Nun setze man $n=10=$ der Ordnungs-Zahl des Gliedes, das gesucht, wird und substituire für p, q, r und n die gefundenen Werthe, so ist $t=(1000\times\frac{1}{6})+(100\times0)+(10\times\frac{5}{6})+2=177=$ dem 10ten Gliede der obigen Reihe.

Verfährt man, um die Werthe von a, b, c und d zu bestimmen, auf gleiche Weise, so folgt $a=\frac{1}{2\,4}$, $b=\frac{1}{1\,2}$, $c=\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ und $d=\frac{2}{1}\frac{9}{2}$; diese nebst dem Werthe für $n=10$ in die für s gegebene Formel gesetzt, gibt $s=(\frac{1}{2\,4}\times10^4)+(\frac{1}{1\,2}\times10^3)+(\frac{1}{2}\frac{1}{4}\times10^2)+(\frac{2}{1}\frac{9}{2}\times10)=570$.

In der folgenden Tabelle sind, um t und s bei Reihen von höheren Ordnungen zu bestimmen, 12 Formeln gegeben, wovon die 7te und 12te allgemein, die übrigen aber nur für die vorstehenden besondern Reihen gültig sind. Diese letzteren sind jedoch auch anwendbar, wenn das erste, oder mehrere der ersten Glieder der in der Tabelle angeführten Reihe fehlen, d. h. die Reihe nicht mit 1 beginnt; die fehlenden Glieder dürfen in diesem Falle nur ergänzt und ihre Summe bei der Bestimmung von s von letzterer Größe wieder abgezogen werden. Wäre z. B. die Reihe 22, 35, 51, 70.. gegeben, und es würde deren 12tes Glied t und die Summe s dieser 12 Glieder zu wissen verlangt, so ergänze man dieselbe nach Formel 3 der angezogenen Tabelle durch Zusatz der 3 fehlenden Glieder 1, 5, 12, deren Summe $= 18$. Nun aber muß in jener Formel $n = 3+12 = 15$ statt 12 gesetzt werden, und man erhielte sodann $t = \frac{15\times(3.15-1)}{2} = \frac{15\times 44}{2} = 330$ und $s = 1800$; davon 18 abgezogen, gibt $1800 - 18 = 1782 =$ der Summe von 12 Gliedern der gegebenen Reihe.

Formeln

für arithmetische Reihen des 2ten und dritten Ranges; dabei ist $d =$ der Differenz, $n =$ der Zahl der Glieder, $a =$ dem 1sten, $b =$ dem 2ten, $c =$ dem 3ten und $f =$ dem 4ten Gliede.

I. Reihen des 2ten Ranges.

No	Reihe.	Das letzte Glied derselben $t =$	Die Summe von n Gliedern $s =$
		1) Triangularzahlen.	
1	1, 3, 6, 10..	$\frac{1}{2}n(n+1)$	$\frac{1}{6}(n^3+3n^2+2n)$
		2) Polygonalzahlen.	
2	1, 4, 9, 16..	n^2	$2n^3+3n^2+n$
3	1, 5, 12, 22..	$\frac{1}{2}n(3n-1)$	$\frac{1}{2}(n^3+n^2)$
4	1, 6, 15, 28..	$n(2n-1)$	$4n^3+3n^2-n$
5	1, 7, 18, 34..	$\frac{1}{2}n(5n-3)$	$\frac{1}{6}(5n^3+3n^2-2n)$
6	$1, 2+d, 3+3d$ $4+6d$	$\frac{1}{2}n(dn-d+2)$	$\frac{1}{6}n(dn^2+3n+3-d)$
7	a, b, c ...	$\frac{(a+c-2b)n^2+(8b-5a-3c)n}{2}$ $+3a+c-3b$	$\frac{(a+c-2b)n^3}{6}+\frac{(3b-2a-c)n^2}{2}$ $+\frac{(11a+2c-7b)n}{6}$

II. Reihen des 3ten Ranges — Pyramidalzahlen.

No	Reihe.	Das letzte Glied derselben $t =$	Die Summe von n Gliedern $s =$
8	1,4,10,20,35	$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$	$\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{24}$
9	1,5,14,30,55	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\frac{n^4+4n^3+5n^2+2n}{12}$
10	1,6,18,40,75	$\frac{n^2(n+1)}{2}$	$\frac{3n^4+10n^3+9n^2+2n}{24}$
11	1,3+d,6+4d,10+10d	$\frac{n(n+1)(dn-d+3)}{6}$	$\frac{dn^4+(4+2d)n^3+(12-d)n^2+(8-2d)n}{24}$
12	a, b, c, f..	$\frac{(f-3c+3b-a)n^3}{6} + \frac{(3a-8b+7c-2f)n^2}{2} + \frac{(11f-42c+57b-26a)n}{6} + 4a-6b+4c-f$	$\frac{(3b-a-3c+f)n^4}{24} + \frac{(5a-13b+11c-3f)n^3}{12} + \frac{(69b-35a-45c+11f)n^2}{24} + \frac{(25a-23b+13c-3f)n}{12}$

§. 122.

Aufgaben über arithmetische Reihen der ersten Ordnung.

1ste Aufgabe. Die Differenz einer Reihe $= 5 = d$, die Summe derselben $= 414 = s$, die Zahl der Glieder $12 = n$; wie groß ist das erste und wie groß das letzte Glied dieser Reihe?

Aufl. Hier ist, um a zu bestimmen, die 18te der in §. 120 gegebenen Formeln, und um t zu bestimmen, die 4te anzuwenden. Es ist nämlich $a = \frac{s}{n} - \frac{(n-1)d}{2} = \frac{414}{12} - \frac{(12-1)5}{2} = 7$, u. $t = \frac{s}{n} + \frac{(n-1)d}{2} = \frac{414}{12} + \frac{(12-1)5}{2} = 62$.

2te Aufgabe. Das erste Glied einer Reihe $= \frac{1}{4}$, das letzte $= 16$, die Anzahl der Glieder $= 24$; was ist die Differenz und die Summe dieser Reihe?

Aufl. Nach Formel 9 ist $d = \frac{3}{4}\frac{1}{6}$ und $s = 198$.

3te Aufgabe. Das erste Glied einer Reihe $= -4$, die Differenz $= +3$ und die Zahl der Glieder $= 18$; wie groß ist das letzte Glied und wie groß die Summe aller Glieder?

Aufl. Nach Formel 1 ist $t = 47$ und nach Formel 5 ist $s = 387$.

4te Aufgabe. Das erste Glied einer Reihe $= 2 = a$, die Differenz derselben $= 4 = d$, die Summe dieser Reihe $= 338 = s$; wie groß ist das letzte Glied t und wie groß die Zahl n der Glieder dieser Reihe?

Aufl. Nach der zweiten Formel ist $t = -2 \pm \sqrt{[2 \times 4 \times 338 + (2-2)^2]} = 50$, und nach der 14ten Formel ist $n = \frac{4-4}{8} \pm \sqrt{[\frac{676}{4} + (\frac{4-4}{8})^2]} = 13$.

Anmerk. Man kann begreiflich bei jeder der vorstehenden 4 Aufgaben, wenn einmal die eine der zwei unbekannten Größen gefunden ist, diese als bekannt annehmen und dann zur Bestimmung der zweiten unbekannten Größe eine bequemere Formel aus der Tabelle entnehmen; so könnte zur Beantwortung der zweiten Frage genommen werden:

1) bei der ersten Aufgabe die 1ste, 2te oder 3te Formel, weil d, s, n und a bekannt,
2) = zweiten = die 5te, 6te oder 8te Formel, weil t, a, n und d bekannt,
3) = dritten = die 6te, 7te oder 8te Formel, weil a, d, n und t bekannt, und
4) = vierten = die 13te, 15te oder 16te Formel, weil a, d, s und t bekannt.

5te Aufgabe. 360 Acker Blößen, die sich auf einem Revier befinden, sollen binnen den nächsten 6 Jahren in Bestand gebracht werden, und zwar so: daß das 1ste Jahr nur 20 Acker, jedes folgende Jahr aber immer eine gleiche Ackerzahl mehr genommen wird, als in dem vorhergehenden Jahre so daß mit dem 6ten Jahre die letzten Acker cultivirt würden; wieviel Acker muß man in jedem Jahre cultiviren?

Aufl. Man bestimme hier aus der bekannten Summe $s =$

360, dem ersten Gliede, $a=20$ und der Anzahl der Glieder $n=6$ die Differenz d und entwickele die Reihe, so erhält man in deren 6 Gliedern, die in jedem Jahre zu cultivirende Ackerzahl. Da $d=16$; so ist die Reihe 20, 36, 52, 68, 84 und 100.

6te Aufgabe. Ein Berechtigter soll von einem Forstreviere auf eine gewisse Reihe von Jahren 238 Klftrn. Scheite bekommen, und zwar ist es demselben überlassen, in welcher Quantität und Zeit er jene Klafterzahl entnehmen will. Er bat sich daher aus: man möchte ihm das erste Jahr 40 Klftr., jedes folgende Jahr aber 2 Klftrn. weniger als in dem nächst vorhergegangenen Jahre geben; wieviel Jahre wird derselbe Holz bekommen und wieviel Klftrn. bekommt er das letzte Jahr?

Aufl. 7 Jahr erhält er Holz und im letzten Jahre 28 Klftrn.

7te Aufgabe. Bei einem, von haubarem Holze, besonders durch die Abgaben der letzten 12 Jahre, sehr entblößten Forste, sollten alle Abgaben an die einzelnen Empfänger, die sich von Jahr zu Jahr gesteigert hatten, auf dem Satz zurück geführt werden, der vor 12 Jahren statt fand. Der Besitzer eines Hammerwerkes erwiederte auf die Frage: wieviel er damals Holz erhalten habe? er wisse es nicht genau, könne sich jedoch soviel erinnern, daß er jedes folgende Jahr stets 40 Klaftern mehr als in dem verflossenen, im letzten Jahre aber 1200 Klftrn. erhalten haben; wieviel hatte dieses Hammerwerk vor 12 Jahren erhalten und wieviel Klaftern hätte es während dieser 12 Jahre bekommen?

Aufl. 760 Klaftern hatte es vor 12 Jahren, und 11760 Klaftern im Ganzen erhalten.

8te Aufgabe. Wenn ein freifallender Körper in der ersten Secunde $15\frac{5}{8}$ Fuß, in jeder der folgenden aber $31\frac{1}{4}$ Fuß mehr als in der vorhergehenden fällt; wie lange wird derselbe von einer Höhe von 1000 Fuß herabfallen und welche Geschwindigkeit wird derselbe in der letzten Secunde seines Fallens haben?

Antw. Er fällt in 8 Secunden und zwar in der letzten Secunde $234\frac{3}{8}$ Fuß.

9te Aufgabe. Wenn unter den obigen Voraussetzungen ein Körper 24 Secunden lang fiele; wieviel Fuß Raum würde er in dieser Zeit und wieviel in der letzten Secunde durchlaufen?

Antw. 9000 Fuß fiele er im Ganzen und 734$\frac{3}{8}$ Fuß in der letzten Secunde.

10te Aufgabe. In einer arithmetischen Reihe von 16 Gliedern ist die Summe des 5ten und 6ten Gliedes $=$ 28$\frac{1}{4}$, das Product des ersten und letzten Gliedes $=$ 121$\frac{1}{2}$; wie groß ist das erste und letzte Glied, wie groß die Differenz und wie groß die Summe dieser Reihe?

Aufl. Da hier sonst nichts als $n=16$ bekannt ist, so setze man die unbekannte Differenz $= x$ und das erste Glied $= y$; so wird das 5te Glied der Reihe $= y+4x$ und das 6te Glied $= y+5x$ seyn; das letzte Glied derselben aber würde $y+15x$, da $n=16$. Nun ist vermöge der gegebenen Bedingungen: 1) $y+4x+y+5x=28\frac{1}{2}$ und 2) $(y+15x)\,y=$ 121$\frac{1}{2}$. Die zwei Gleichungen nach §. 93 reducirt, gibt $y=3$ und $x=2\frac{1}{2}$. Nun findet man nach der ersten Formel $t=40\frac{1}{2}$ und nach der 7ten Formel $s=348$.

11te Aufgabe. Die Fertigung eines Entwässerungsgrabens in einem Torfmoor wurde, weil das Moor nach dessen Gränze zu immer seichter ward, auf folgende Art verdungen. Für die erste Ruthe sollten 16 gr., für jede der folgenden aber stets 8 pf. weniger als für die vorhergehende bezahlt werden. Nun hat der Arbeiter 12$\frac{1}{2}$ Ruthe gefertiget; wieviel wird derselbe zu fordern haben?

Aufl. Der Accord ist hier nach ganzen Ruthen abgeschlossen; es sind aber 25 halbe Ruthen gefertiget, deren Preis zwar anders, doch gleichfalls in einer arithmetischen Reihe steigend ist. Setzen wir in dieser Reihe den Preis für die erste halbe Ruthe $= x$ und die Differenz dieser Reihe $= y$; so ist der Preis

für die zweite halbe Ruthe $= x + y$, für die dritte $= x + 2y$ u. s. w. Da nun aber 2 halbe Ruthen soviel gelten müssen als eine ganze, so ist 1) $x + x + y = 16$ gr. $= 192$ pf., u. 2) $x + 2y + x + 3y = 16$ gr. $- 8$ pf. $= 184$ pf.; hieraus folgt $x = 97$ und $y = -2$. Die Preise der gefertigten 25 halben Ruthen bilden also die Reihe: 97, 95, 93, 91 ꝛc., deren Summe $= 1825$ pf. $= 6$ Thlr. 8 gr. 1 pf.

12te Aufgabe. Unter einige Personen wurde eine Summe Geld vertheilt. Man weiß nur, daß immer jeder Folgende $1\frac{1}{2}$ Thlr. mehr als der Vorhergehende bekam, daß der erste und letzte zusammen $35\frac{1}{2}$ Thlr. bekommen haben, und daß die Summe, die der erste erhielt mit der Zahl der Personen multiplicirt, $= 90$ war; wieviel Personen waren es und wie groß war die vertheilte Summe?

Aufl. Der erste soll x Thlr. erhalten haben und die Zahl der Personen sey $= y$, so hat der letzte nach Formel 1, $x + (y-1)1\frac{1}{2} = x + \frac{3y-3}{2}$ Thlr. erhalten; den Bedingungen zufolge ist nun: 1) $x + x + \frac{3y-3}{2} = 35\frac{1}{2}$, 2) $xy = 90$.

Hieraus folgt $x = 5$ Thlr. und $y = 18 =$ der Zahl der Personen, und die vertheilte Summe $= 319\frac{1}{2}$ Thlr.

§. 123.

Aufgaben über arithmetische Reihen von höheren Ordnungen.

1ste Aufgabe. Die 3 ersten Glieder einer arithmetischen Reihe des zweiten Ranges sind 3, $5\frac{1}{4}$ und $7\frac{3}{4}$; wie groß ist das 12te Glied dieser Reihe und wie groß die Summe derselben?

Aufl. Da die Ordnung der Reihe bekannt, so setze man in der 7. Formel der in §. 121 enthaltenen Tabelle $a = 3$, $b = 5\frac{1}{4}$, $c = 7\frac{3}{4}$ und $n = 12$; so folgt $t = 41\frac{1}{2}$ und $s = 239\frac{1}{2}$.

2te Aufgabe. Die drei ersten Glieder einer Reihe sind 5, 9 und 16; die erst bei der dritten Subtraction gleichbleibende Differenz ist = 1,5; wie groß ist das 8te Glied und wie groß die Summe dieser 8 Glieder?

Aufl. Die Reihe gehört, vermöge §. 119, zur 3ten Ordnung; die unter Nr. 12 gegebene allgemeine Formel setzt jedoch 4 Glieder als bekannt voraus; man suche also das 4te Glied nach §. 119; es ist dasselbe nämlich $16+7+3+1,5 = 27\frac{1}{2}$; nun erhält man mittelst der 12. Formel $t=82,5$ u. $s=425$.

3te Aufgabe. Ein Haufen Kugeln ist in Form einer dreiseitigen Pyramide, die 16 Kugelschichten hoch ist, aufgesetzt, und zwar so, daß die oberste Schicht nur 1 Kugel, die zweite 3 und die dritte Schicht 6 Kugeln enthält; wieviel Kugeln wird die unterste Schicht und wieviel die ganze Pyramide Kugeln enthalten?

Antw. Nach Formel 1 ist $t = 136$ und $s = 816$.

4te Aufgabe. Ein anderer Kugelhaufen steht als eine vierseitige Pyramide aufgeschichtet, bei welcher die oberste Schicht aus 1, die zweite aus 4, die dritte aus 9 Kugeln bestehet; wenn nun die Pyramide 20 Schichten hat, wieviel Kugeln enthält dann die unterste Schicht und wieviel die ganze Pyramide?

Antw. Nach der 2ten Formel folgt $t=400$ und $s=17220$.

3te Aufgabe. Ein Haufen Kugeln ist so aufgeschichtet, daß dessen Grundfläche ein Rechteck, die obere Schicht aber eine einfache Kugelreihe bildet, die aus $12 = m$ Kugeln besteht; ditse ruhet auf 2 Reihen Kugeln, jede von $m+1=13$ Stück; diese liegen wiederum auf 3 Reihen Kugeln, jede von $m+2=14$ Stck. ꝛc. Wenn nun dieser Haufen $10 = n$ Schichten hat; wieviel Kugeln wird die untere Schicht und wieviel der ganze Haufen enthalten?

Aufl. Die erste enthält $m = 12$ Kugeln, folglich enthalten die 2 folgenden Schichten $2(m+1) = 26$ Kugeln,
" 3 " " $3(m+2) = 42$ "
" 4 " " $4(m+3) = 60$ " u. s. w.
" n " " $n(m+n-1) = 210$ " und die Summe aller Kugeln, nämlich $s = \frac{n(n+1)(2n+3m-2)}{6} =$ 990.

6te Aufgabe. Wie groß sind t und s bei folgender Reihe der dritten Ordnung: 1, 8, 27, 64 . . ., wenn $n = 10$?

Aufl. Diese Reihe wird durch die Cuben der natürlichen Zahlenreihe gebildet; bei ihr ist also $t = n^3 = 1000$ und $s = [\frac{1}{2}n(n+1)]^2 = 3025$.

Zweites Kapitel.

Von den geometrischen Reihen.

§. 124.

Erhält man bei einer Reihe mittelst der Division eines Gliedes in sein nächstfolgendes immer gleiche Quotienten, so heißt die Reihe eine geometrische. Der durch die Division erhaltene Quotient heißt der Exponent der Reihe und wird allgemein durch e bezeichnet. Der allgemeine Ausdruck für eine geometrische Reihe von n Gliedern, bei welcher a das erste Glied ist, wäre sonach $a + ae + ae^2 + ae^3 \ldots + ae^{n-1}$.

Ist der Exponent größer als 1, so wird die Reihe eine steigende genannt, weil jedes folgende Glied ein Product des vorhergehenden, multiplicirt mit dem Exponenten, also größer als

das vorhergehende ist. Ist der Exponent kleiner als 1, so heißt die Reihe eine fallende, weil bei ihr jedes folgende Glied, als Product des vorhergehenden und des Exponenten (der dann ein Bruch) kleiner als das ihm nächst vorhergehende ist. Ist der Exponent = 1, so findet keine Reihe statt, weil jedes folgende Glied ein Product aus dem nächst vorhergehenden, multiplicirt mit 1, also = dem vorhergehenden Gliede seyn würde.

§. 125.

Das letzte oder *n*te Glied einer geometrischen Reihe erhält man: wenn man das erste Glied (allgemein *a*) der Reihe mit dem Exponenten *e* in die sovielste Potenz erhoben als die Ordnungszahl des Gliedes Einheiten weniger eine hat, multiplicirt; es ist nämlich $t = ae^{n-1}$. Wäre z. B. bei der Reihe 2, 6, 18 u. s. w., das 5te, 9te und *n*te Glied zu bestimmen, so wäre, weil *e* hier = 3, das 5te Glied $= 2 \times 3^4 = 162$, das 9te Glied $= 2 \times 3^8 = 13122$ und das *n*te Glied $= 2 \times 3^{n-1}$.

Die Summe einer geometrischen Reihe wird erhalten: wenn man das letzte Glied mit dem Exponenten multiplicirt, das erste Glied von diesem Producte abzieht und den bleibenden Rest durch den Exponenten weniger 1 dividirt; es ist nämlich $s = \frac{ae^n - a}{e-1} = \frac{a(e^n-1)}{e-1}$. Wäre z. B. $a = 2$, $e = 3$ und $n = 8$; so wäre $s = \frac{2(3^8-1)}{3-1} = 3^8 - 1 = 6560$.

Aus den zwei Grundformeln $t = ae^{n-1}$ und $s = \frac{a(e^n-1)}{e-1}$ sind auf ähnliche Art, wie bei den arithmetischen Reihen, 20 Formeln, die die folgende Tafel enthält, für die geometrischen Reihen entwickelt worden.

Nr	Gegeben.			Gesucht.	Formeln.
1	a	e	n		$t = ae^{n-1}$
2	a	e	s		$t = \frac{a+(e-1)s}{e}$
3	a	n	s	t	$t(s-t)^{n-1} - a(s-a)^{n-1} = 0$
4	e	n	s		$t = \frac{(e-1)se^{n-1}}{e^n-1}$
5	a	e	n		$s = \frac{a(e^{n-1})}{e-1}$
6	a	e	t		$s = \frac{et-a}{e-1}$
7	a	n	t	s	$s = \frac{t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$
8	e	n	t		$s = \frac{t(e^n-1)}{(e-1)e^{n-1}}$
9	e	n	t		$a = \frac{t}{e^{n-1}}$
10	e	n	s	a	$a = \frac{(e-1)s}{e^n-1}$
11	e	t	s		$a = et - s(e-1)$
12	n	t	s		$a(s-a)^{n-1} - t(s-t)^{n-1} = 0$
13	a	n	t		$e = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$
14	a	n	s		$e^n - \frac{es}{a} + \frac{s-a}{a} = 0$
15	a	t	s	e	$e = \frac{s-a}{s-t}$
16	n	t	s		$e^n - \frac{se^{n-1}}{s-t} + \frac{t}{s-t} = 0$
17	a	e	t		$n = \frac{\log t - \log a}{\log e} + 1$
18	a	e	s		$n = \frac{\log(a+es-s) - \log a}{\log e}$
19	a	t	s	n	$n = \frac{\log t - \log a}{\log(s-a) - \log(s-t)} + 1$
20	e	t	s		$n = \frac{\log t - \log(et-es+s)}{\log e} + 1$

§. 126.

Aufgaben über geometrische Reihen. *)

1ste Aufgabe. Ein Hufschmidt forderte bei Beschlagung eines Pferdes für den ersten Nagel 1 pf., für jeden folgenden aber stets noch einmal soviel als für den nächst vorhergehenden. Wenn nun derselbe im Ganzen 32 Nagel einzuschlagen hatte, wieviel Thaler erhielt er dafür?

Aufl. Da hier $a = 1$ pf. $= \frac{1}{288}$ Thlr., $e = 2$, $n = 32$ bekannt, s aber unbekannt ist, so wende man zur Bestimmung des Werthes von s die 5te der im vorigen §. gegebenen Formeln an, nach welcher hier $s = \frac{\frac{1}{288}(2^{32}-1)}{2-1} = \frac{1}{288}(2^{32}-1)$ $= 14913080$ Thlr. 21 gr. 3 pf.

2te Aufgabe. Das erste Glied einer geometrischen Reihe $= \frac{1}{4} = 0{,}25$, der Exponent derselben $= 1\frac{1}{8} = 1{,}125$, die Zahl der Glieder $= 4$; wie groß ist das letzte Glied, und wie groß die Summe aller 4 Glieder?

Aufl. Nach Formel 1 ist $t = 0{,}25 \times 1{,}125^3 =$ 0,35595703125, und da t bekannt, so ist nach Formel 5 od. 6, wovon letztere die leichtere, $s = \frac{et-a}{e-1} = \frac{1{,}125 \times t - 0{,}25}{1{,}125 - 1} =$ 1,20361328125.

3te Aufgabe. Von 6 Zahlen, die eine geometrische Reihe bilden, ist die Summe der ersten $5 = 39{,}5625 = A$; die Summe der letzten 5 Glieder aber $= 59{,}34375 = B$; diese 6 Zahlen sind?

Aufl. Ist das erste Glied der zu suchenden Progression (die erste Zahl) $= a$ und der Exponent $= e$, so sind die ersten 5

---

*) Es folgen hier nur wenige Aufgaben, weil in §. 136 bei mehreren dergleichen die vortheilhafte Anwendung der Logarithmen gezeigt ist, die über die 3te, 12te, 14te und 16te Formel gegebenen Aufgaben aber die Reduction der höheren Gleichungen bedingen, also erst im §. 168 folgen konnten.

Glieder $= a + ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 = A$, und die letzten 5 Glieder $= ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 + ae^5 = B$.

Multiplicirt man die erste dieser zwei Gleichungen mit dem Exponenten e und subtrahirt dieselbe von der zweiten, so erhält man $0 = B - Ae$, also $B = Ae$ und $e = \frac{A}{B}$, hier $= \frac{59{,}34375}{39{,}5625} = 1{,}5$. Nunmehr sind bekannt, die Anzahl der Glieder $= 5$, die Summe der ersten 5 Glieder $= 39{,}5625$ und der Exponent $= 1{,}5$; das erste Glied ist also nach der 10ten Formel $= 3$, die 6 Zahlen aber sind: 3; 4,5; 6,75; 10,125; 15,1875 und 22,78125.

4te Aufgabe. Ein Baum hatte bei 35jährigem Alter 10, und nach 5 Jahren 14,641 Cubikfuß. Wenn man nun annimmt, der Zuwachs sey in geometrischer Progression erfolgt; wieviel wird dann der Baum im 36sten und jedem folgenden Altersjahre zugewachsen haben?

Aufl. Hier sind bekannt $a = 10$, $t = 14{,}641$ und $n = 5$; folglich ist, nach Formel 13, $e = 1{,}1$. Der Baum hatte also zu Ende

des 36sten Jahres 11 Cubikf. und demnach 1 Cubf. zugewachsen,
" 37sten " 12,1 " " 1,1 " "
" 38sten " 13,31 " " 1,21 " "
" 39sten " 14,641 " " 1,331 " "

5te Aufgabe. Zwischen zwei gegebenen Größen soll man eine beliebige Zahl anderer Größen so einschalten, daß eine geometrische Progression entsteht, deren erstes und letztes Glied gleich den gegebenen Größen sind.

Aufl. Man setze die eine dieser Größen $= a$, die andre $= t$ und die Zahl der einzuschaltenden Glieder $= n-2$, so ist nach Formel 13 der Exponent e der zu bildenden Reihe $\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$.

Wären z. B. zwischen 2 und 64 noch 4 Glieder einzuschalten, so daß eine Reihe von $n = 6$ Gliedern entstände, so wäre $e = 2$ und die gesuchte Reihe 2, 4, 8, 16, 32, 64.

Drittes Kapitel.

Von den Logarithmen.

§. 127.

Wenn man eine beliebige Zahl a, die größer oder kleiner als die Einheit, jedoch positiv ist, nach und nach zu allen nur möglichen, ganzen und gebrochenen Potenzen erhebt; so heißen die Exponenten die Logarithmen der also hervorgegangenen Potenzen. Es wären nämlich bei $a^m = b$, $a^n = c$, $a^p = d$, $a^q = e$, $a^r = f$, die Exponenten m, n, p, q und r die Logarithmen der Potenzen b, c, d, e und f, und zwar wäre m der Logarithme von b, n der Logarithme von c, p der Logarithme von d u. s. w. Wäre z. B. $a = 10$, $m = 0$, $n = 1$, $p = 2$, $q = 3$ und $r = 4$; so wäre

$a^m = 10^0 = 1$ und 0 = den Logarithmen von 1,
$a^n = 10^1 = 10$ = 1 = = = 10,
$a^p = 10^2 = 100$ = 2 = = = 100,
$a^q = 10^3 = 1000$ = 3 = = = 1000,
$a^r = 10^4 = 10000$ = 4 = = = 10000;

so daß der Logarithme einer beliebigen Zahl x = dem Exponenten der Potenz wäre, auf welche a gehoben werden müßte, um = x zu werden.

Die Zahl a wird die Basis oder Grundzahl genannt, weil dieselbe stets den einmal für sie angenommenen Werth, bei Aufbauung eines Logarithmen-Systems behält. Wären aber die Logarithmen für eine andre Grundzahl A zu berechnen, so daß $A^m = t$, $A^n = u$, $A^p = v$ u. s. w. wäre, so erhielte man abermals ein logarithmisches System, dessen Basis = A und bei dem m der Logarithme von t, n der Logarithme von u, p der Logarithme von v u. s. w. wäre.

Man wendet in der Mathematik zweierlei Logarithmen an, nämlich die natürlichen oder hyperbolischen (siehe §. 132), und die künstlichen oder

briggischen Logarithmen. *) Bei ersteren ist die Grundzahl = 2,7182818... **), bei letzteren aber ist selbige = 10.

§. 128.

Jeden Logarithmen des einen Systems, kann man in einen des andern Systems verwandeln: wenn man die Einheit

---

*) Johann Nepper, ein Schottländischer Baron, gab im Jahre 1614 die ersten natürlichen Logarithmen heraus. Heinrich Briggs, Professor zu Oxford, berechnete die künstlichen Logarithmen für die Zahlen von 1 — 20000 und von 90000 bis 100000. Adrian Blacq, ein Holländer, berechnete die Logarithmen für die fehlende Lücke von 20 — 90000 mit 10 Decimalstellen. Von den jetzt vorhandenen logarithmischen Tafeln sind für den Forstmann empfehlungswerth: 1) Vegas logarithmisch-trigonometrisches Handbuch ꝛc. 4te verbesserte Auflage, Leipzig, bei Weidmann 1 Thlr. 12 gr., 2) dessen vollständige Sammlung größerer logarithmisch-trigonometrischer Tafeln ꝛc. in demselben Verlage. In erstgenannten Werke finden sich die Logarithmen mit 7, in letzteren mit 10 Decimalstellen, für die Zahlen von 1 bis 101000.

**) Um die Basis des natürlichen Logarithmen-Systems zu bestimmen, setze man selbige $= \left(1^m + \frac{1}{m}\right)^m$, und nehme dabei m unendlich groß an. Entwickelt man diese Potenz nach §. 117, so erhält man folgende unendliche Reihe:

$$1 + \frac{m.1^m}{1.m} + \frac{m(m-1).1^{m-1}}{1.2.m^2} + \frac{m(m-2)(m-3).1^{m-2}}{1.2.3.m^3}$$

$+ \ldots$ u. s. f., und da bei den Größen $m-1$, $m-2\ldots$ die Zahlen 1, 2.. in Betracht gegen das unendlich große m verschwinden, so wird jene Reihe zu

$$1 + \frac{m}{m} + \frac{m^2}{1.2.m^2} + \frac{m^3}{1.2.3.m^3} + \ldots \text{ nämlich} = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots.$$

Entwickelt man die Glieder dieser Reihe, so folgt die gesuchte Basis = 1 + 1 + 0,5 + 0,166... + 0,04166.. + 0,00833.. + 0,001388... + 0,0001984.. + 0,0000248.. + 0,0000027.. = 2,7182818....

durch den Logarithmen der Grundzahl des ersteren Systems dividirt und diesen Quotienten mit dem zu verwandelnden Logarithmen multiplicirt. Der durch Division erhaltene Quotient ist unter dem Namen des logarithmischen Moduls bekannt. Sollte z. B. der briggische Logarithme von b aus dem schon bekannten natürlichen Logarithmen von a (wo $a =$ der Grundzahl des briggschen Systems) bestimmt werden; so ist derselbe $= \frac{1}{\log \text{ nat. } a} \times$

$\log \text{ nat. } b = \frac{1}{\log \text{ nat. } 10} \times \log \text{ nat. } b =$

$\frac{1}{\log. \text{ nat } 2{,}30258509} \times \log \text{ nat. } b.$ Wäre nun log nat. b $=$ log nat. $3 =$ log nat. $1{,}0986122$, so wäre der briggsche Logarithme von $3 = \frac{1}{2{,}30258509} \times 1{,}0986122 = 0{,}4342944.. \times$ $1{,}0986122 = 0{,}4771213...$ Dabei wäre die Größe $0{,}4342944..$ der Modul des briggschen Systems. Man darf daher nur, um aus natürlichen Logarithmen briggsche zu erhalten, die ersteren mit $0{,}434294481903..$ multipliciren; und umgekehrt erhält man aus briggschen Logarithmen natürliche, wenn man erstere mit obiger Zahl dividirt, oder was gleich ist, mit $2{,}30258509 2994...$ multiplicirt.

§. 129.

Setzt man die, im vorigen §. angeführten Potenzen der Grundzahl 10 des briggschen Systems in eine Reihe und über diese die Exponenten der Potenzen — die Logarithmen — so werden erstere in einer geometrischen, letztere in einer arithmetischen Reihe steigen; nämlich

0,	1,	2,	3,	4,	5,	6.
1,	10,	100,	1000,	10000,	100000,	1000000.

Schon diese wenigen Glieder beider Reihen machen uns mit den vorzüglichsten Eigenschaften der Logarithmen bekannt. Es sind folgende.

Die Anwendung der Logarithmen verwandelt

1) die Multiplication in eine Addition und die Division in eine Subtraction; sollte z. B. 100 mit 10000 multiplicirt werden, so erhält man durch Addition der log von 100 und 10000, nämlich in $2 + 4 = 6$ einen Log., dessen zugehörige Zahl $= 100 \times 10000 = 1000000$. Eben so gibt $\log 5 - \log 3 = \log 2$ in der zu 2 gehörgen Potenz 100 den Quotienten von $\frac{100000}{1000}$

2) die Erhebung der Potenzen in eine Multiplication mit den Exponenten, so daß $m \log p = p^m$, oder durch ein Beispiel erläutert, $2 \log 3 = 1000^2 = 1000000$.

3) die Ausziehung der Wurzeln in eine Divisinn mit dem Wurzelexponenten, so daß $\frac{\log p}{m} = \sqrt[m]{p}$; oder z. B. $\frac{\log 4}{2} = \sqrt{10000} = 100$.

Außer diesem allgemeinen Vortheil, den selbige durch Abkürzung oft sehr beschwerlicher Rechnungen gewähren, leisten sie noch besonderen Nutzen bei Auflösung der Gleichungen, worinnen die unbekannte Größe als Exponent steht, nämlich die unter der Form $a^x = b$ erscheinen.

§. 130.

Aus den, in §. 127 gegebenen Erklärungen geht hervor:

1) daß man alle Logarithmen für jede Potenz der 10 sehr leicht finden und beliebig fortsetzen kann, und daß diese Logarithmen ganze Zahlen sind;

2) daß die Logarithmen aller Zahlen, die zwischen die auf einander folgenden Potenzen der 10 fallen, eine ganze Zahl (die jedoch auch $= 0$ seyn kann) nebst einem Bruche seyn müssen. So würden z. B. die Logarithmen der Zahlen von 2 — 9 aus der ganzen Zahl 0; die der Zahlen von 11 — 99 aus der ganzen Zahl 1, die der Zahlen 101 — 999 aus der ganzen Zahl

2 u. s. w. nebst einem angefügten Bruche bestehen. Diese ganze Zahl wird die Charakteristik genannt, weil mittelst derselben sogleich bestimmt werden kann, aus wieviel Ziffern die zu dem Logarithmen gehörige Zahl bestehet; wäre dieselbe z. B. gleich 4, so besteht die Zahl aus 5, wäre sie gleich n, so besteht die Zahl aus $n+1$ Ziffern; (dies gilt jedoch nur von den briggschen Logarithmen). Den angehängten Decimalbruch nennt man die Mantisse.

3) Für jede Zahl, die sich in Factoren zerlegen läßt, von welchen die Logarithmen schon bekannt sind, findet man den Logarithmen in der Summe der Logarithmen der einzelnen Factoren; wären z. B. die Logarithmen von a, b und c bekannt, so ist der noch unbekannte Logarithme von $abc = \log a + \log b + \log c$ (§. 129). Eben so findet man den noch unbekannten Logarithmen für jede Potenz einer Zahl, deren Log. schon bekannt ist, wenn man den bekannten Log. mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt; wäre z. B. der Log. von a bekannt, so ist der von $a^m = m \log a$.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich, daß nur die Logarithmen für die eigentlichen Primzahlen berechnet werden dürfen, um mittelst dieser alle andre zu bestimmen.

§. 131.

Zur Berechnung der Logarithmen für die Primzahlen 2, 3, 5, 7... m bieten sich folgende Gleichungen dar, in welchen $x =$ dem unbekannten Log. für die auf der andern Seite des Gleichheitszeichens stehende Zahl, nämlich: 1) $10^x = 2$, 2) $10^x = 3$, 3) $10^x = 5$, 4) $10^x = 7$ oder allgemein $10^x = m$, wo $m =$ jeder beliebigen Primzahl. In diesen Gleichungen müßten nun für x nach und nach solche Werthe gesetzt werden, daß $10^x = m$ würde. Wäre z. B. $m = 2$, so wäre $10^{0,30103}$ fast $= 2$, also wäre 0,30103 der Log. von 2. Diese Arbeit würde aber, besonders bei sehr großen Primzahlen, unendlich weitläufig werden; deßhalb stehen in den folgenden §§en. zwei schneller zum Ziel führende Methoden, den Log. einer jeden Primzahl zu berechnen.

§. 132.

Ein englischer Mathematiker, Namens Long, machte in den philosophischen Transactionen für das Jahr 1724 ein Verfahren, Logarithmen zu berechnen, bekannt, welches sich darauf gründet: daß man die Ordnung der Rechnung umkehrt, nämlich soviel Werthe für x im Voraus berechnet, als nöthig sind, um daraus den Werth von m zu bestimmen, d. h. man kann machen, daß x gegeben und m zu suchen ist. Man bestimme nämlich die Werthe von $10^{0,1}$, $10^{0,2}$, $10^{0,3}$ bis $10^{0,9}$ nach den früher gegebenen Regeln; eben so die von $10^{0,01}$ bis $10^{0,09}$, von $10^{0,001}$ bis $10^{0,009}$ u. s. f. mit einem Exponenten von soviel Decimalstellen, als deren die Mantisse des zu berechnendeu Log. enthalten soll.

Long selbst gab bei dieser Gelegenheit die Potenzen mit Exponenten von 1 bis 8 Decimalstellen ($x = 0{,}9$ bis mit $x = 0{,}00000001$) heraus (sie sind unter dem Namen der longschen Zahlen bekannt), und zeigte zugleich das anzuwendende Verfahren in einigen Beispielen umständlich. — Hier würde es zu weit vom Zwecke führen, über diesen Gegenstand zu sprechen *), dá überdies im folgenden §. eine Methode gezeigt wird, die, besonders bei großen Primzahlen, noch schneller als die von Long angegebene zum Ziele führt.

§. 133.

Vega bestimmt in der Einleitung zu seinen logarithmisch-trigonometrischen Handbuche und in seinen Vorlesungen über die Mathematik im 5. Abschn. der 6. Vorlesung die natürlichen Logarithmen mittelst der unendlichen Reihe: $\log p = \log(p-1) + 2A$

$$\left[\frac{1}{2p-1} + \frac{1}{3(2p-1)^3} + \frac{1}{5(2p-1)^5} + \frac{1}{7(2p-1)^7} + \frac{1}{9(2p-1)^9} \cdots\right],$$

in welcher $p = 2$, folglich $\log(p-1) =$

*) Der Wißbegierige findet sowohl das Verfahren als die longschen Zahlen in Lacroix Anfangsgründen der Algebra, übers. von Metternich, S. 534 ff. umständlich ausgeführt.

0 und A = 1 gesetzt wird. Bei den briggschen Logarithmen aber ist A = dem Modul = 0,434294481903.. Weil bei den nat. Log. der Modul A = der Einheit genommen wird, so hat man denselben das Beiwort natürlich zugesetzt, um sie von jedem andern System, dessen Modul $\gtrless$ als 1, zu unterscheiden. Ist einmal der Log. von 2 bestimmt, so wird diese Reihe noch mehr convergiren, wenn man ihr statt p, q^2 setzt, wo für q jede Zahl zu setzen ist, deren Logarithme bestimmt werden soll; sie erhält sonach die Form: $$\frac{\log(q+1)+\log(q-1)}{2} + A\left[\frac{1}{2q^2-1} + \frac{1}{3(2q^2-1)^3} + \frac{1}{5(2q^2-1)^5} \ldots\right]$$

Anm. Begreiflich müssen die Logarithmen von $q \pm 1$ bekannt seyn, wenn der von q bestimmt werden soll; ist aber q eine Primzahl, so sind $q \pm 1$ keine, sie lassen sich also in Factoren zerlegen, deren jeder kleiner als q ist, von denen also die Logarithmen bereits bestimmt sind.

Je größer bei dieser Reihe die Primzahl q wird, desto weniger Glieder wird man von derselben zu entwickeln nöthig haben. Als Beispiel soll der briggsche Logarithme von $37 = q$ berechnet werden. Der Log. von $q-1 = \log 36$ und $\log q+1 = \log 38 = \log(19\times 2) = \log 19 + \log 2$; es ist nämlich:

$$\frac{\log(q+1)+\log(q-1)}{2} =$$

$$\frac{(\log 1{,}2787536 + \log 0{,}3010300) + \log 1{,}5563025}{2} =$$

1,56804305. Die Reihe würde also folgende seyn: $\log 37 =$

$$1{,}56804305 + A\left(\frac{1}{2.37^2-1} + \frac{1}{3(2.37^2-1)^3} \ldots\right) =$$

$$1{,}56804305 + A\left(\frac{1}{2737} + \frac{1}{20503319553}\right. = 1{,}56804305$$

$+$ A (0,00036536 $+$ 0,00000000004.. Da hier A =

0,43429448.., so ist log 37 = 1,56804305 + 0,43429448..

$\times$ 0,00036536.. = 1,56804305 + 0,00015867.. =

1,56820172... Dagegen wäre der Log. 10433 =

$$\frac{\log 10432 + \log(5217 \times 2)}{2} + A\left(\frac{1}{2 \cdot 10433^2 - 1}\right)\ldots =$$

$$4{,}0184092\ldots + A\left(\tfrac{1}{217694977}\right) = 4{,}0184092\ldots *$$

Anm. Wenn nämlich der Logarithme nur bis auf 9 Decimalstellen entwickelt wird, weil die Größe $A\left(\frac{1}{217694977}\right)$ erst bei der 10ten Decimalstelle eine geltende Ziffer gibt.

Viertes Kapitel.

Anwendung der Logarithmen bei verschiedenen Rechnungsarten.

§. 134.

Bei Reduction der Flächen- und Körpermaße.

Die folgenden Aufgaben gehören eigentlich zu §. 56, und werden auch im Wesentlichen nach den daselbst gegebenen Regeln aufgelöst. Man bemerke jedoch: daß alle Verhältnisse, die in Längenmaßen gegeben, bei Reduction der Flächenmaße zum Quadrat, und bei Reduction der Cubikmaße zum Cubus erhoben werden müssen. Diese Erhebung zum Quadrat oder Cubus bedingt aber stets eine mehr oder minder weitläufige Multiplication und die endliche Auflösung der Aufgabe eine noch beschwerlichere Division, besonders da die Verhältnisse der verschiedenen Fußmaße gewöhnlich in größeren Zahlen ausgedrückt sind. Aus diesem Grunde bedient man sich mit Vortheil der Logarithmen, weil mittelst ihrer Anwendung die Erhebung zum Quadrat in eine Multiplication des Logarithmen mit 2, die zum Cubus in eine Multiplication mit 3, alle übrige Multiplicationen aber in Additionen und die endliche Division in eine Subtraction verwandelt werden.

1ste Aufgabe. Was betragen 300 sächsis. Quadratruthen (ein sächs. Acker) an sächs. Quadratellen, wenn die Ruthe Längenmaß = 7 Ellen 14 Zoll?

Aufl. Da 7 Ellen 14 Zoll $= 7\frac{7}{12}$ Ell., so findet nach §. 56 folgender Ansatz statt.

$$\begin{array}{r|l} 12^2 \quad x & (7\frac{7}{12})^2 \text{ Elle.} = \left(\frac{91}{12}\right)^2 \\ 1^2 \text{ Ruth.} & 300 \text{ QR.} \end{array}$$

Dieser wird zu $(12^2 :: 300 \times 91^2$

Nun ist

$\log 12 = 1{,}0791812$

2

$\log 12^2 = 2{,}1583624$

$\log 91 = 1{,}9590414$

2

$\log 91^2 = 3{,}9180828$

$\log 300 = 2{,}4771213$

$\log (91^2 \times 300) = 6{,}3952041$

$-\log 12^2 = 2{,}1583624$

$\log (91^2 \times 300 : 12^2) = 4{,}2368417$

Hierzu ist die Zahl 17252,09.. Es sind nämlich 300 Q.R. = 17252,09.. Q.Ellen.

2te Aufgabe. Wie verhält sich der preuß. Morgen, à 180 rhein. Q.R., zum sächs. Acker, à 300 sächs. Q.R., da die rhein. Längenruthe = 12 Fuß, die sächs. aber $15\frac{1}{6}$ Fuß hat; der rhein. Fuß aber zum sächs. sich verhält wie 13913 : 12550?

Aufl. Da die Verhältnisse $12 : 15\frac{1}{6}$ und $13913 : 12550$ in Längenmaße angegeben sind, so sind selbige erst zum Quadrat zu erheben, welches beim folgenden Ansatz durch den Exponenten 2 angedeutet ist.

x	1 s. Ack.
1	1 pr. Morg.
1 QR.	180 QR.
1^2	12^2 Fuß = 144
12550^2	13913^2
$\frac{91^2}{6^2} = (15\frac{1}{6})^2$	1^2 s. Fuß $\quad 6^2 = 36$
300	1^2 s. Ruth.

$12550^2 \times 91^2 \times 300 :: 13913^2 \times 180 \times 144 \times 36.$

Nun ist

$\log 12550 = 4{,}0986437$

2

$\log (12550)^2 = 8{,}1972874$

$\log (91)^2 = 3{,}9180828$

$\log 300 = 2{,}4771213$

$(a) = 14{,}5924915$

$\log 13913 = 4{,}1434208$

2

$\log (13913)^2 = 8{,}2868416$

$\log 180 = 2{,}2552725$

$\log 144 = 2{,}1583625$

$\log 36 = 1{,}5563025$

$(b) = 14{,}2567791$

$-(a) = 14{,}5924915$

$0{,}6642876 - 1$

Hierzu ist die Zahl = 0,461623... Der sächs. Acker verhält sich also zum pr. Morgen wie 1:0,461623...

3te Aufgabe. Der weimarische Morgen hat 140 Q.R., die Längenruthe 16 Fuß und das Verhältniß des weimarischen Fußes zum sächsischen ist 12530: 12550; wieviel machen demnach 10 weimarische Morgen an sächs. Ackern?

Antw. 5,17703... sächs. Acker.

4te Aufgabe. Wieviel beträgt 1 neuer würtemberger Morgen an sächs. Ack., wenn der erstere 384 Q.R., die Längenruthe zu 10 Fuß gerechnet, enthält, der sächs. Fuß aber sich zum würtemb. wie 12550 : 12700 verhält?

Aufl. 0,569835.. sächs. Acker; der neuer würtemberger Morgen verhält sich also zum sächs. Acker wie 0,569835 : 1.

5te Aufgabe. Wie verhält sich das französisch Are zum sächs. Acker, da 1 Are = 100 Q. Mètre, ein Mètre Längenmaß aber = 443,2959 Pariser Linien, der sächs. Fuß aber 125,50 dergleichen Linien enthält? Antw. Wie 0,01808..: 1.

6te Aufgabe. Was betragen 24 englische Acres an rheinischen Morgen, wenn 1 Acre 160 QR., die Ruthe Längenmaß 16½ Fuß, der Fuß aber 135,1154 Pariser Linien enthält; der rheinische Morgen hingegen 160 QR., die Längenruthe zu 12 Fuß und der Fuß zu 139,13 Pariser Linien gerechnet?

Antw. 24,79419.. rheinische Morgen.

7te Aufgabe. Was betragen 12 Morgen 125 QR. Danziger Maß, der Morgen zu 300 QR. gerechnet, an rheinischen Morgen, da die Danziger Ruthe 15 Fuß und der Fuß 127,2 Pariser Linien hat? Antw. 30,4059 rh. Morgen.

8te Aufgabe. Der gothaische Waldacker hat 160 QR., die Längenruthe 16 Fuß und der Fuß 127,5 Pariser Linien; wie verhält sich dieser Acker zum sächsischen?

Antw. wie 0,6126202.. : 1.

9te Aufgabe. Der österreichische Juchart hat 1600 Q. Klftrn., die Klftr. Längenmaß 6 Fuß und der Fuß 140,127 pariser Linien; wie verhält sich der Juchart zum sächs. Acker?

Antw. wie 1 : 1,04058..

10te Aufgabe. Nach Hartigs physikalischen Versuchen hat die $\frac{8}{4}$ ell. Klftr. Stieleichenholz 86 Cubikfuß und der rheinische Cbkfß. dergl. Holzes wiegt, wenn er grün ist, $69\frac{1}{4}$ Pfund würtemberger Gewicht; was wird das Gewicht einer Klftr. Holz in sächs. Pfunden seyn, die 86 sächs. Cbkfß. enthält, da sich der rheinische Längenfuß zum sächs. wie 13913 zu 12550, das würtemberger Pfund aber sich zum sächs. wie 9734,56 zu 9716 verhält?

Aufl. Bei Fertigung des Ansatzes geht man nach folgender Ordnung: wieviel sächs. Pfd. wiegen 86 sächs. Cbkfß., wenn 1 Cbfß. 12550 Theile und 13913 solcher Theile 1 rh. Fß., 1 rh. Cbkfß. aber $69\frac{1}{4}$ würtemberger Pfd., 1 dergl. Pfund 9734,56 holl. Aß, und 9716 dergl. Aß ein sächs. Pfd. ausmachen.

x	1 s. Pfd.
1^3	86 s. Ckf.
13913^3	12550^3
1^2	1 rhein. Fuß
1	$69\frac{1}{4}$ Pf. rh. $= \frac{277}{4}$
9716	9734,56 Ack.

$13913^3 \times 9716 \times 4 :: 12550^3 \times 86 \times 277 \times 9734{,}56$

Nun ist:

log 13913 = 4,1434208	log 12550 = 4,0986437
3	3
3 log 13913 = 12,4302624	3 log 12550 = 12,2959311
log 9716 = 3,9874875	log 9734,56 = 3,9883162
log 4 = 0,6020600	log 277 = 2,4424798
log (a) = 17,0198099	log 86 = 1,9344985
	log (b) = 20,6612256
	− log a = 17,0198099
	3,6414157

Hierzu ist die Zahl = 4379,411 sächsische Pfunde.

11te Aufgabe. Ein Stamm, welcher 60 Cubikfuß hannöverisches Maß hatte, ward in Hannover für 5 Thlr. 12 gr. verkauft; wie theuer käme nach diesem Preise der Leipziger Werkfuß zu stehen, da sich der hannöverische Längenfuß zum Leipziger verhält wie 12944 : 12530?

Antw. 1 gr. 11,94702.. pf.

12te Aufgabe. Wieviel sächs. Cbkfß. enthält ein französisches Stère, da letzteres 1000 Litres enthält; der Litre aber ein Würfel ist, dessen Seite = $\frac{1}{10}$ Mètre = 44,32959 Pariser Linien, der sächs. Längenfuß dagegen 125,5 pariser Linien enthält? Antw. 44,0707 sächs. Cbkfß.

13te Aufgabe. Wenn der rheinische Cbkfß. frisches Weißtannenholz 59 würt. Pfd. wiegt, was wird ein Leipziger Cbkfß. an Pfunden Leipziger Handelsgewicht wiegen, da der rheinische Längenfuß zum Leipziger sich wie 13913 : 12530, das würtemberger Pfund aber zum Leipziger sich wie 9734,56 : 9716 verhält? Antw. 43,1789.. Leipziger Pfd.

14te Aufgabe. Wenn die $\frac{8}{4}$ell. Klftr. fichtene Scheite, à 100 rheinische Cbkfß., für 7 rheinische Gulden verkauft wird; wieviel Groschen wird dann der sächs. Cbkfß. zu stehen kommen, da der rheinische Gulden = 13 gr. 4 pf. sächs. ist?

Antw. 0,685023.. gr. = 8,220276.. pf.

15te Aufgabe. Wieviel betragen 24 brandenburger Cubikruthen an sächs. Cbkfß., da eine dergl. Ruthe = 108 brandenburger Cbkfß., der brandenburger Fuß Längenmaß aber sich zum sächs. wie 1373 : 1255 verhält?

Antw. 3394,028.. sächs. Cbkfß.

§. 135.

Bei Auflösung der Exponential-Gleichungen.

Eine Gleichung, in welcher die unbekannte Größe als Exponent vorkommt, heißt eine Exponential- oder loga-

rithmische Gleichung. Ihre einfachste allgemeine Form ist $a^x = b$. Man bestimmt bei ihr x dadurch, daß man alle Größen logarithmisch ausdrückt, und x nach §. 39 und 40 entwickelt. Dabei müssen jedoch diejenigen Größen, die mit den Zeichen $\pm$ verbunden erscheinen, als eine zusammengesetzte betrachtet werden, weil in logarithmisch ausgedrückten Gleichungen jede Addition der Logarithmen eine Multiplication, jede Subtraction eine Division der Größen bewirkt (§. 129).

Die Exponentialgleichungen kommen bei Auflösungen geometrischer Progressionen vor, wenn n unbekannt, außerdem noch bei der zusammengesetzten Interessenrechnung: deshalb soll hier bei Reduction der folgenden 6 Aufgaben das Verfahren dargestellt werden.

1ste Aufgabe. $a^x b^x = cd^3$.

Aufl. Die gegebene Gleichung logarithmisch ausgedrückt, gibt solche:

$$x \log a + x \log b = \log c + 3 \log d$$
$$x(\log a + \log b) = \log c + 3 \log d$$
$$x = \frac{\log c + 3 \log d}{\log a + \log b}$$

2te Aufgabe. $a^{nx} = bc^{mx}$.

Aufl. $nx \log a = mx \log c + \log b$
$$nx \log a - mx \log c = \log b$$
$$x(n \log a - m \log c) = \log b$$
$$x = \frac{\log b}{n \log a - m \log c}$$

3te Aufgabe. $24^x = 7962624$

Aufl. $x = \frac{\log 7962624}{\log 24} = \frac{\log 6{,}9010561}{\log 1{,}3802112} = 5$

4te Aufgabe. $\left(\frac{15}{16}\right)^{\frac{x}{3}} = 0{,}823974\ldots$

Aufl. $\frac{x}{3} \log \frac{5}{16} = \log 0{,}823974..$

$x(\log 15 - \log 16) = 3 \log 0{,}823974..$

$$x = \frac{3 \log 0{,}823974..}{\log 15 - \log 16} = \frac{3 \log 0{,}9159139 - 1}{\log 1{,}1760913 - \log 1{,}2041200} =$$

$$\frac{\log 0{,}7477417 - 1}{\log 0{,}9719713 - 1} = 9$$

5te Aufgabe. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x-3}{2}} = \frac{8}{2}\frac{1}{3}\frac{}{6}$

Aufl. $\left(\frac{x-3}{2}\right)(\log 3 - \log 4) = \log 81 - \log 256$

$$x = \frac{\log 0{,}0004900 - 1}{\log 0{,}8750613 - 1} + 3 = 8 + 3 = 11$$

6te Aufgabe. $(\frac{2}{3})^{3x} \times (\frac{3}{4})^{6-x} = \frac{1}{3}\frac{}{6}$

Aufl. $x = 2$

§. 136.

Bei Aufgaben, die durch geometrische Reihen aufgelöst werden können.

1ste Aufgabe. Ein Bauer säete eine Metze Weizenkörner aus und benutzte die ganze Ernte zur Aussaat für das folgende Jahr, und dies machte er mit der Ernte dieses Jahres wiederum so, und so mit jeder folgenden. Wenn er nun damit volle 8 Jahre aushielt, und im 8ten Jahre 4882 Schfl. 3 Viertel 1 Metze einerntete, um wievielmal muß sich jedes einzelne Saatkorn während dieser Zeit vervielfältiget haben?

Aufl. Da hier $a = 1$ (die zuerst ausgesäete Metze), $n = 8$ und $t = 4882$ Schfl. 3 V. 1 M. $= 78125$ Metzen; nach Formel 13 aber $e = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$, so wird, wenn man diese Formel loga-

rithmisch ausdrückt, $\log e = \frac{\log t - \log a}{n-1}$, hier $=$ $\frac{\log 78125 - \log 1}{8-1} = \frac{4{,}8927900}{7} = 0{,}6989700$. Hierzu ist die Zahl $= 5$.

2te Aufgabe. Angenommen, daß bei gänzlicher Schonung die vorhandenen Hasen eines Jagdreviers sich jährlich um das Dreifache vervielfältigt hätten und jetzt deren 5824 vorhanden wären; wieviel würden unter diesen Voraussetzungen vor 6 Jahren da gewesen seyn?

Aufl. Hier ist $e = 3$, $s = 5824$ und $n = 6$ bekannt; nun ist nach der 10ten Formel $a = \frac{(e-1)s}{e^n-1}$. Es ist aber $\log e^n = n \log e$; hier also $= 6 \log 3 = 2{,}8627278$, wozu die Zahl $= 729$; diese um 1 vermindert, gibt $e^n - 1 = 728$. Die Formel nunmehro logarithmisch dargestellt, gäbe $\log a = \log 2 + \log 5824 - \log 728$. Nun ist

$\log 2 = 0{,}3010300$
$\log 5824 = 3{,}7652214$
$4{,}0662514$
$- \log 728 = 2{,}8621314$
$1{,}2041200$

Die dazu gehörige Zahl gibt $a = 16$.

3te Aufgabe. Das erste Glied einer geometrischen Progression ist gleich 4, der Exponent derselben gleich 0,75, die Summe derselben gleich 14,798644..; aus wieviel Gliedern besteht diese Reihe?

Aufl. Nach Formel 18 ist $n =$

$$\frac{\log [4 + (0{,}75 \times 14{,}798644) - 14{,}798644] - \log 4}{\log 0{,}75} = 10.$$

4te Aufgabe. Zwischen $2 = a$ und $5 = t$ sollen noch 8 Glieder so eingeschalten werden, daß dadurch eine geometrische Reihe von 10 Gliedern gebildet wird; wie groß ist das 2te Glied

dieſer Reihe, wie groß der Exponent, und was iſt die Summe derſelben?

Aufl. Man beſtimme nach Formel 15 erſt, wie groß der Exponent iſt, und dann, durch Multiplication des erſten Gliedes mit demſelben, das zweite u. ſ. f. Es iſt nämlich $e = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$ oder logarithmiſch ausgedrückt, iſt $\log e = \frac{\log t - \log a}{n-1}$ hier $=$

$\frac{\log 5 - \log 2}{10-1} = \frac{\log 0{,}6989700 - \log 0{,}3010300}{9} =$

1,107172.. Das zweite Glied wäre folglich $= 2 \times 1{,}107172..$

$= 2{,}214344..$, und die Summe $s = \frac{1{,}107172.. \times 5 - 2}{1{,}107172.. - 1}$

$= 32{,}9923...$

Neunter Abschnitt.

Einfache und zusammengesetzte Interessenrechnung

und deren Anwendung bei Bestimmung des Waldwerthes.

Erstes Kapitel.

§. 137.

Einfache Interessenrechnung.

Kapital wird gewöhnlich eine Summe Geldes genannt, die man einem Andern für eine, durch gemeinschaftliche Uebereinkunft bestimmte, Entschädigung, den Zins oder die Interessen, auf kürzere oder längere Zeit zu beliebigem Gebrauche überläßt. Diese Entschädigung — der Zins oder die Interessen — wird gewöhnlich nach dem Hundert des ausgeliehenen Kapitals bestimmt, und zwar wird in den mehrsten Fällen festgesetzt: wieviel von dem Hundert in einem Jahre Entschädigung gegeben werden soll; sie ist daher auch unter dem Namen der Procente bekannt. Unter Zinsfuß wird die, durch die größere oder geringere, im Umlauf sich befindende Geldmenge oder durch die Landesgesetze bestimmte Zahl der Procente verstanden, die Iman von einem Kapital zu fordern berechtiget ist.

Die Rechnung aber, die sich mit Bestimmung der Zinsenmenge, welche von einem Kapital erhalten wird, beschäftiget, ist

unter dem Namen Intereſſenrechnung bekannt. Einfach wird ſie genannt, wenn dabei von den, in einer gewiſſen Zeit von einem Kapital erhaltenen Zinſen, keine Zinſen wieder in Anſchlag gebracht werden; werden aber die Zinſen eines ausgeliehenen Kapitals ſo beſtimmt, daß man die jährlich eingehenden Zinſen immer als neue Kapitale betrachtet, die im nächſten Jahre wieder Zinſen tragen, ſo erhält die Rechnung, welche ſich mit der Auflöſung dergleichen Aufgaben beſchäftiget, den Namen der Zinſeszins- oder der zuſammengeſetzten Intereſſenrechnung. Die hier folgenden Aufgaben beſchäftigen ſich nur mit der einfachen Intereſſenrechnung und können zum Theil nach den in den §§en. 52 bis 55 gegebenen Regeln aufgelöſt werden.

§. 138.

Wenn die jährlichen Intereſſen eines Kapitals von $100 = c$ Thalern $= p$ geſetzt wird; ſo erhält man nach §. 55, Aufgabe 5:

1) die Zinſen z, die ein Kapital von k Thalern in n Jahren gebracht haben wird, durch den allgemeinen Ausdruck $z = \frac{kpn}{c}$. In jener Aufgabe war nämlich $k = 3000$, $n = 4\frac{1}{2}$ und $p = 4$, daher wäre, an die Stelle der Buchſtaben ihre Werthe geſetzt, $z = \frac{3000 \times 4 \times 4\frac{1}{2}}{100} = 540$. Eben ſo würde aus den während n Jahren erfolgten Zinſen z,

2) das Kapital k durch Reduction des, unter 1 gefundenen Ausdrucks erhalten; nach ſelbigen wäre nämlich $k = \frac{cz}{pn}$.

3) Die Zeit, in welcher ein Kapital k, das zu p Procent ausgeliehen iſt, z Thaler Zinſen gebracht haben wird, erhält man nach der 6ten Aufgabe des §s. 54 ſowohl, als durch Reduction des unter 1 angegebenen allgemeinen Ausdrucks, bei dem n als unbekannte

Größe angesehen wird; es ist nämlich $n = \frac{zc}{kp}$; in der angezogenen Aufg. war $z = 567$, $p = 4\frac{1}{2}$ u. $k = 3600$ also $n = \frac{567 \times 100}{3600 \times 4\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{2}$ Jahr.

4) Die Procente, zu welchen ein Kapital k ausgeliehen ist, das in n Jahren z Thaler Zinsen gebracht hat, erhält man nach der 6ten Aufgabe des §s. 55 sowohl, als durch Reduction des unter 1 angegebenen allgemeinen Ausdrucks, wenn man p als die darinnen vorkommende unbekannte Größe ansiehet. Es ist nämlich $p = \frac{zc}{kn}$; in der angezogenen Aufgabe war $z = 924$, $k = 4800$, $n = 5\frac{1}{2}$ also $p = \frac{924 \times 100}{4800 \times 5\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{2}$ Procent.

5) Das Kapital nebst den in n Jahren von selbigem eingegangenen Interessen, nämlich die Summe s, erhält man, wenn man zu dem unter 1 gefundenen Ausdruck $z = \frac{kpn}{c}$ das Kap. k addirt, es ist näml. $s = \frac{kpn}{c} + k =$

$$\frac{kpn}{c} + \frac{ck}{c} = \frac{ck + kpn}{c} = \left(\frac{c + pn}{c}\right) k = \left(\frac{pn}{c} + 1\right) k.$$

6) Die Zeit, in welcher ein ausgeliehenes Kapital durch dazu geschlagene Interessen sich verdoppelt hat, nämlich, wenn die eingegangenen Zinsen soviel als das ausgeliehene Kapital betragen, ist $n = \frac{c}{p}$; setzt man nämlich $s = 2k$, so wird der unter 5 gefundene Ausdruck zu $2k = \frac{kpn}{c} + k$, woraus durch Reduction $n = \frac{c}{p}$ folgt. Die Zeit, nach welcher sich das Kapital auf diese Weise verdreifacht haben wird, ist $n = \frac{(3+1)c}{2p} = \frac{2c}{p}$; wenn sich dasselbe vervierfachen soll, ist $n = \frac{(4+2)c}{2p} = \frac{3c}{p}$ und wenn es sich ver m fachen soll, so ist $n = \frac{(m+(m-2))c}{2p} = \frac{(2m-2)c}{2p} = \frac{(m-1)c}{p}$

7) Die Procente, zu welchen ein Kapital k ausgeliehen werden muß, damit die in n Jahren eingehenden Intereſſen $=$ dem Kapitale werden, ſind $p = \frac{c}{n}$, ſetzt man nämlich in den unter 1 gefundenen Ausdruck $z = k$, ſo iſt $k = \frac{kpn}{c}$, woraus durch Reduction $p = \frac{c}{n}$ folgt. Wenn aber die in n Jahren eingehenden Intereſſen, doppelt, drei- oder $m$fach ſo groß werden ſollten, als das ausgeliehene Kapital, ſo iſt $p = \frac{2c}{n}$; $p = \frac{3c}{n}$ oder $p = \frac{mc}{n}$

Mittelſt Anwendung der hier gegebenen Grundformeln laſſen ſich die nachſtehenden Aufgaben leicht auflöſen.

§. 139.

1ſte Aufgabe. Der jetzige Beſtand eines Walddiſtrikts iſt 24600 Cubicfuß; wieviel Maſſe wird dieſer Beſtand nach 20 Jahren enthalten, wenn auf 100 Cbkfß. jährlich $1\frac{1}{4}$ Cbkfß. Zuwachs erfolgt?

Aufl. Die Auflöſung dieſer Aufgabe wird mittelſt der 5ten Formel bewirkt, indem hier der jährlich erfolgende Zuwachs als die Procente eines Kapitals — der jetzigen Holzmaſſe — angeſehen werden können. Dieſe Formel iſt $s = \frac{(pn+c)k}{c}$; und da hier $p = 1\frac{1}{4}$, $n = 20$ und $k = 24600$, ſo iſt, weil c in allen Formeln $= 100$, $s = \frac{(20\times 1\frac{1}{4}+100)}{100}\,24600 = \frac{(25+100)}{100}\,24600 = 125 \times 246 = 30750$ Cubikfuß.

2te Aufgabe. Der Acker eines 20jährigen Fichtenbeſtandes enthält jetzt 2500 Cbkfß. Holzmaſſe; wieviel Jahre werden erforderlich ſeyn, damit dieſer Beſtand pro Acker 10000 Cubikfuß Holzmaſſe enthalte, wenn der Zuwachs zu $2\frac{1}{2}$ pro Cent angenommen wird?

Aufl. Bei dieser Aufgabe ist die unter 6 angeführte Formel anzuwenden. Den Bedingungen zufolge soll die Holzmasse nach n Jahren nebst dem Zuwachse das $\frac{10000}{2500} =$ Vierfache des jetzt Vorhandenen ausmachen. Die in jener allgemeinen Formel enthaltenen Buchstaben erhalten aber hier folgende Werthe: $m = 4$, $p = 2\frac{1}{2}$; also ist hier $n = \frac{(4-1)\,100}{2\frac{1}{2}} = 120$ Jahr.

3te Aufgabe. Auf einem Walddistrikte findet man, daß ein mit 20jährigen Buchen bestandener Acker 3000 Cbkfß., ein andrer, mit 120 jährigen Buchen bestandener Acker, dessen Boden und Lage mit ersteren gleich sind, 10500 Cbkfß. Holzmasse enthält. Angenommen, daß letzterer Bestand vor $120 - 20 = 100$ Jahren dieselbe Masse hatte, die jetzo der erstere zeigt; wieviel p. C. wird dieser Bestand im Durchschnitt jährlich zugewachsen haben?

Aufl. Diese Aufgabe kann mittelst der, unter 7 entwickelten Formel aufgelöst werden, wenn man untersucht: um wievielmal die Cbkfß., die in $n = 100$ Jahren zugewachsen sind, die Zahl der anfänglich vorhandenen Cbkfß. übertreffen. Leichter geschieht die Auflösung jedoch durch die unter 4 entwickelte Formel. In dieser ist hier $z = 7500$, $k = 3000$ und $n = 100$, also $p = \frac{7500 \times 100}{3000 \times 100} = 2\frac{1}{2}$. Also $2\frac{1}{2}$ Procente hat im Durchschnitt der Bestand jährlich Zuwachs gehabt.

4te Aufgabe. Die gesammte Holzmasse eines Reviers beträgt 40000 Klftrn.; der jährliche Zuwachs auf diesem Reviere ist im Durchschnitt $1\frac{3}{4}$ Procent; wenn man nun jährlich nur soviel schlagen will, als zuwächst, wieviel Klftrn. wird man schlagen können?

Aufl. Diese Aufgabe wird durch die, unter 1 entwickelte Formel $z = \frac{kpn}{c}$ gelöst; darinnen wird $k = 40000$, $p = 1\frac{3}{4}$ und $n = 1$, also ist $z = \frac{40000 \times 1\frac{3}{4} \times 1}{100} = 100 \times 7 = 700$ Klftrn. Hierbei fände jedoch die schwer ausführliche Bedingung statt, daß jede abgetriebene Fläche, unmittelbar nach dem Abtriebe gleich wieder bestanden wäre.

5te Aufgabe. Die jetzige Holzmasse eines Forstbezirks ist

360000 Cbkfß. Nach angestellten Beobachtungen wachsen auf 100 Cbkfß. jährlich $1\frac{1}{4}$ Cbkfß. zu; wieviel Jahre werden verfließen, ehe von jener Masse 90000 Cbkfß. Zuwachs erfolgt sind?

Aufl. Diese Aufgabe kann durch die unter 3 angeführte Formel sowohl, als auch, wenn der Zuwachs zum jetzt vorhandenen Bestand addirt wird, durch die 4te Formel gelöst werden. Bei ersterer Formel erhalten die Buchstaben folgende Werthe: $x = 90000$, $k = 360000$ und $p = 1\frac{1}{4}$; folglich ist $n = \frac{90000 \times 100}{360000 \times 1\frac{1}{4}} = \frac{900}{36 \times \frac{5}{4}} = \frac{200}{45} = 20$ Jahre.

6te Aufgabe. Ein haubarer Fichtenbestand, der 80000 $= k$ Cbkfß. Holzmasse und $1\frac{1}{2} = p$ Procent Zuwachs hat, soll so benutzt werden, daß am Ende eines jeden Jahres der 5te $= n$te Theil des Ganzen und folglich am Ende des 5ten $= n$ten Jahres der letzte Theil der vorhandenen und zugewachsenen Masse abgetrieben wird; wieviel Cbkfß. wird man jährlich schlagen können?

Aufl. Die Summe der jährlich zu schlagenden Cubikschuhe sey $= r$. Nach der 5ten Formel wären nun die zu Ende des 1sten Jahres geschlagenen r Cubikschuh, am Ende $n$ten Jahres nebst dem Zuwachs $= \frac{[p(n-1)+c]r}{c}$; die zu Ende des 2ten Jahres $= \frac{[p(n-2)+c]r}{c}$; die zu Ende des 3ten Jahres $= \frac{[p(n-3)+c]r}{c}$; die zu Ende des 4ten $= n-1$ten Jahres $= \frac{[p(n-4)+c]r}{c}$ und die zu Ende des 5ten $= n$ten Jahres $= \frac{[p(n-n)+c]r}{c} = r$ Cubikschuhen angewachsen, wenn sie nicht geschlagen worden wären. Diese $n = 5$ Größen stehen in einer arithmetischen Reihe, deren erstes Glied $= \frac{[p(n-1)+c]r}{c}$, das letzte $= r$, und die Summe $= \left(\frac{[p(n-1)+c]r}{c} + r\right)\frac{n}{2} = \frac{rn[p(n-1)+2c]}{2c}$ (§. 120) $=$ derjenigen Größe, zu welcher sämmtliche r nebst dem Zuwachse am Ende des $n$ten Jahres angewachsen wären. Da aber diese Summe $=$ der des Kapitals k + aller Zinsen (dem Zuwachs), die dieses in n

Jahren gebracht hat, nämlich $= \frac{(pn+c)k}{c}$ (s. Formel 5) ist; so wird r durch Reduction der Gleichung $\frac{(pn+c)k}{c} = \frac{rn[p(n-1)+2c]}{2c}$ nach §. 40 erhalten; es ist nämlich $r = \frac{2k(pn+c)}{n[p(n-1)+2c]}$. Da nun hier $k = 80000$, $n = 5$, $p = 1\frac{1}{2}$ und c wie immer $= 100$; so ist $r = \frac{2 \times 80000(1\frac{1}{2} \times 5 + 100)}{5[1\frac{1}{2}(5-1)+2 \times 100]} = \frac{160000 \times 107\frac{1}{2}}{5 \times 206} = \frac{17200000}{1030} = \frac{1720000}{103} = 16699\frac{3}{103}$ Cubikschuhe.

Denkt man sich unter den 80000 Cbkfch. ein Kapital, das zu $1\frac{1}{2}$ Procent ausgeliehen ist, welches der Besitzer in 5 Jahren nebst den Zinsen verzehren will, so würde derselbe

im 1. J. 1200 Tlr. Zins. erhalten u. $15499\frac{3}{103}$ Tlr. v. Kap. entnehmen
= 2. = $949\frac{53}{103}$ = = = = $15749\frac{53}{103}$ = = = =
= 3. = $699\frac{3}{103}$ = = = = 16000 = = = =
= 4. = $448\frac{56}{103}$ = = = = $16250\frac{50}{103}$ = = = =
= 5. = $198\frac{6}{103}$ = = = = $16500\frac{100}{103}$ = = = =

müssen, um jährlich die durch die Formel berechneten $16699\frac{3}{103}$ Tlr. zu bekommen. Nun aber ist $16699\frac{3}{103} \times 5 = 82495\frac{15}{103}$ = der Summe der obigen 10 Größen.

7te Aufgabe. Ein Kapitalist will eine Summe von 16000 Thlrn., die zu 4 Procent ausgeliehen ist, in 10 Jahren nebst den eingehenden Zinsen so verzehren, daß er allemal zu Anfange des Jahres die im Laufe desselben zu verzehrende Geldsumme r wegnimmt, und folglich zu Anfange des 10ten Jahres gerade noch r Tlr. übrig hat; wieviel wird derselbe jährl. verzehren können?

Aufl. Diese Aufgabe hat mit der vorigen gleiche Bedingungen, bis auf den Umstand: daß hier das zu Anfange des Jahres weggenommen wird, was dort erst zu Ende des Jahres geschah. Die Summe der n mal wegzunehmenden r Thaler nebst allen Zinsen würde hier begreiflich ebenfalls $= \frac{rn[p(n-1+2c]}{2c}$

seyn; dagegen wäre das Kapital, wenn Nichts weggenommen würde, zu Anfange des $n$ten Jahres nur zu $\frac{[p(n-1)+c]k}{c}$ Tlr. nebst den Zinsen angewachsen. Setzen wir daher diese Größe, wie bei voriger Aufgabe, gleich der obigen, und reduciren die Gleichung $\frac{rn[p(n-1)+2c]}{2c} = \frac{[p(n-1)+c]k}{c}$ nach §. 40, so folgt $r = \frac{2k[c+p(n-1)]}{n[2c+p(n-1)]}$. Da nun hier $k = 16000$, $p = 4$ und $n = 10$; so ist $r = \frac{2\times16000[100+4(10-1)]}{10[2\times100+4(10-1)]} = \frac{32000\times136}{10\times236} = 1844\frac{4}{59} = 1844$ Thlr. 1 gr. $7\frac{3}{5}\frac{1}{9}$ pf.

8te Aufgabe. Es sollen dieselben Größen gegeben seyn und dieselben Bedingungen statt finden wie bei der vorigen Aufgabe, nur mit der Ausnahme: daß von dem Kapital $k = 16000$ Thlr. am Ende des 10ten Jahres noch $6000 = a$ Thlr. übrig sind; wieviel wird dann der Besitzer des Kapitals jährlich verzehren können?

Aufl. Die bei der 6ten Aufgabe entwickelte Reihensumme $\frac{rn[p(n-1)+2c}{2c}$ kann als diejenige Größe angesehen werden, zu welcher sämmtliche r durch die Zinsen zu Anfange des $n$ten Jahres angewachsen wären. Da aber hier diese Summe = dem Kapital k nebst allen Zinsen, die solches bis zu Anfange des $n$ten Jahres gebracht hat, weniger einer Größe q seyn soll, nämlich $\frac{rn[p(n-1)+2c]}{2c} = \frac{k[p(n-1)+c]}{c} - q$, wo die Größe q so angenommen ist, daß solche durch die im $n$ten Jahre gebrachten Zinsen, zu Ende desselben $= a$ wird, daß nämlich $\frac{(c+p)q}{c} = a$ und $q = \frac{ac}{c+p}$, so wäre, wenn für q der eben entwickelte Werth in obige Gleichung gesetzt wird: $\frac{rn[p(n-1)+2c]}{2c} = \frac{k[p(n-1)+c]}{c} - \frac{ac}{c+p}$. Hieraus folgt $r = \frac{2[k(c+p)(pn-p+c)-ac^2]}{n(c+p)(pn-p+2c)}$

Da hier dieselben Werthe für die Buchstaben statt finden wie bei voriger Aufgabe, a aber $= 6000$; so ist $r =$

$$\frac{2[16000(100+4)(40-4+100)-6000\times100\times100]}{10(100+4)(40-4+2\times100)} = 1355$$

Thlr. 3 gr. $7\frac{132}{167}$ pf.

9te Aufgabe. Ein Fichtenbestand hat jetzo 40000 Cbkfß. Masse und 2 Procent Zuwachs; die Benutzung desselben soll so geschehen: daß zu Ende eines jeden der nächstfolgenden 10 Jahre eine so große Summe r weggenommen wird, damit am Ende des 10ten Jahres noch 10000 Cbkfß. vorhanden sind; wieviel Cbkfß. wird man jährlich schlagen können?

Aufl. Diese Aufgabe hat mit der vorigen gleiche Bedingungen, nur soll das hier zu Ende des Jahres erfolgen, was dort zu Anfange geschah. Aehnliche Schlüsse, wie bei voriger Aufgabe, auf die bei der 6ten Aufgabe entwickelte Gleichung angewandt, geben: $\frac{rn[p(n-1)+2c]}{2c} = \frac{k(pn+c)}{c} - a$; woraus $r =$

$\frac{2[k(c+np)-ca]}{n[p(n-1)+2c]}$ hier $= 3486\frac{26}{109}$ Cubikschuh folgt.

10te Aufgabe. A will an B eine Summe Geld unter der Bedingung übergeben: daß ihm B die nächsten 10 Jahre, und zwar jedesmal zu Anfange des Jahres 3000 Thlr. jährlich zurückzahle. Wenn nun B diese Summe zu 5 Procent zu benutzen gedenkt, wie groß wird selbige seyn müssen, damit die zehnmalige Ausgabe von 3000 Thlr. dadurch gedeckt wird?

Aufl. Diese Aufgabe hat mit der 7ten gleiche Bedingungen, nur ist hier k unbekannt und r bekannt. Man reducire daher die dort angegebene Formel so, daß durch sie der Werth von k ausgedrückt wird. Jene Formel ist $r = \frac{2k[c+p(n-1)]}{n[p(n-1)+2c]}$. Hieraus folgt $k = \frac{rn[2c+p(n-1)]}{2[c+p(n-1)]}$. Da nun hier $r = 3000$, $n =$ 10, $p = 5$, so ist $k = \frac{3000\times10[2\times100+5(10-1)]}{2[100+5(10-1)]} =$

25344 Thlr. 19 gr. $10\frac{9}{19}$ pf.

11te Aufgabe. Von einem Walddistrikt, dessen Zuwachs $2\frac{1}{4}$ Procent beträgt, sollen 5 Jahre nach einander, am Ende eines

jeden derselben 18000 Cbfß. geschlagen und abgegeben werden. Man will dem Empfänger diese Hölzer gleich auf dem Stocke, zur eben angegebenen successiven Benutzung übergeben; wieviel Cbkfß. wird man, bei Berücksichtigung des erfolgenden Zuwachses jetzo zu übergeben haben?

Aufl. Diese Aufgabe hat mit der 6ten gleiche Bedingungen, nur ist hier r bekannt und k unbekannt. Man reducire deshalb die in jener Aufgabe entwickelte Formel so, daß man den Werth für k erhält; dort war nämlich $r = \frac{2k(c+np)}{n[2c+p(n-1)]}$. Hieraus folgt $k = \frac{rn[2c+p(n-1)]}{2(c+np)}$. Da nun hier $r = 18000$, $n = 5$ u. $p = 2\frac{1}{2}$, so ist $k = 84000$ Cubikschuhe.

Die folgenden 7 Uebungsaufgaben können entweder nach den bereits angegebenen Formeln aufgelöst, oder doch die in selbigen vorkommenden unbekannten Größen durch ähnliche Reductionen, wie bei den letzten zwei Aufgaben statt hatten, bestimmt werden; im letzteren Falle steht vor dem Resultat der Auflösung auch stets die reducirte Formel.

12te Aufgabe. Von einem haubaren Fichtenbestande, der 36000 Cbkfß. Holzmasse und 2 Procent Zuwachs hat, sollen jährlich 2400 Cbkfß. geschlagen werden und zwar soll der Holzschlag stets nach erfolgtem Zuwachse, also zu Ende des Jahres statt finden; wievielmal wird man diese 2400 Cbkfch. entnehmen können?

Aufl. Durch Reduction der bei der 6ten Aufg. entwickelten Formel folgt $n = \frac{\sqrt{8prck+(2cr-2pk-pr)^2}-(2cr-2pk-pr)}{2pr} = \frac{497929{,}15\ldots-331200}{9600} = 17{,}3676\ldots$ mal; man wird nämlich 17 Jahre lang, jedesmal 2400 Cbkfß. schlagen können und noch $\frac{2400}{1} \times \frac{3676}{10000} = 882{,}24\ldots$ Cbkfß. übrig haben.

13te Aufgabe. Vor 10 Jahren hatte ein haubarer Fichtenbestand 450000 Cbkfß. Masse; man nahm von selbigem zu

Ende eines jeden Jahres 18000 Cbkfß. und hat jetzo, nachdem man diese Summe zehnmal hinweggenommen hat, noch 300000 Cbkfß. vorräthig; wieviel Procent hat dieser Bestand jährlich Zuwachs gehabt?

Aufl. Man erhält durch Reduction der, bei der 11. Aufg. entwickelten Formel $p = \frac{2c(k-a-nr)}{n[r(n-1)-2k]} = \frac{100}{123}$ Procent.

14te Aufgabe. Ein Kapitalist will in 6 Jahren eine Summe von 9000 Thlrn. nebst den Zinsen so verzehren, daß derselbe zu Anfange eines jeden Jahres 1725 Thlr. davon wegnimmt; zu wieviel Procent wird derselbe jene Summe verleihen müssen?

Aufl. Durch Reduct. der bei der 7. Aufg. entwickelten Formel erhält man $p = \frac{2c(k-rn)}{n(nr-n)-2k(n+1)} = \frac{-270000}{-63936} = 4\frac{33}{148}$ Procent.

15te Aufgabe. Vor 12 Jahren hatte ein Holzbestand 24600 Cbkfß. Masse und $1\frac{1}{2}$ Procent Zuwachs; jetzo, zu Ende des 12ten Jahres, ist dieser Bestand gänzlich abgetrieben; wieviel Cbkfß. hat derselbe im Durchschnitt jährlich geliefert?

Aufl. $r = 2234\frac{278}{433}$ Cbkf.

16te Aufgabe. Man weiß, daß ein mit Fichten bestandener Distrikt 300000 Cbkfß. Holzmasse und 1,75 Procent Zuwachs hat. Man will aus diesem Bestande eine jährliche Holzabgabe von 18000 Cbkfß. 12 Jahre lang so bestreiten, daß allemal jene 18000 Cbkfß. zu Ende des Jahres abgegeben werden; wieviel Cbkfß. werden nach erfolgter letzter Abgabe, am Ende des 12ten Jahres, noch vorräthig seyn?

Aufl. Durch Reduction der, bei der 11ten Aufgabe entwickelten Formel erhält man

$$a = k - rn + \frac{pn[k-\frac{1}{2}r(n-1)]}{c} = 126210 \text{ Cubikfuß.}$$

17te Aufgabe. Ein 80jähriger Fichtenbestand hat jetzo, zu Ende des Jahres 1,25 Procent Zuwachs bei einer Holzmasse von 240000 Cbfß.; man will denselben 90 Jahr alt werden lassen und

ihn von 91sten und die darauf folgenden 9 Jahre so benutzen, daß zu Ende eines jeden Jahres eine gleich große Zahl Cubikschuhe daraus entnommen wird, zu Ende des 100ten Jahres aber dieses das letztemal geschiehet; wieviel Cubikschuhe wird man jährlich benutzen können?

Aufl. Man bestimme erst nach Formel 5, wieviel Cbkfß. zu Ende des 90sten Jahres vorhanden sind, setze diese $= k$ in die bei der 6ten Aufgabe entwickelte Formel, so erhält man

$r = 28757\frac{67}{169}$ Cubikfuß.

18te Aufgabe. Ein Kapitalist vermehrt ein zu 4 Procent ausgeliehenes Kapital von 4000 Thlr. jedes Jahr mit 400 Thlr.; benutzt zwar, so lange diese Vermehrung dauert, immer die eingehenden Zinsen, will jedoch, nachdem er das Kapital 6 Jahre jedesmal um 400 Thlr. vermehrt hat, Kapital und Zinsen in den folgenden 6 Jahren so verwenden, daß er zu Anfange eines jeden Jahres eine gleich große Summe wegnimmt; wieviel wird derselbe jährlich wegnehmen können?

Aufl. Das ursprüngliche Kapital ist, da die Zinsen davon benutzt werden, zu Ende des 6ten Jahres zu $4000 + (400 \times 6) = 6400$ Thlr. angewachsen; daher ist nach der bei der 7ten Aufgabe entwickelten Formel $r = 1163$ Thlr. 15 gr. $3\frac{3}{11}$ pf.

Zweites Kapitel.

Zusammengesetzte Interessenrechnung.

(Zinses-Zinsrechnung.)

§. 140.

Ein Kapital, das zu p Procent ausgeliehen ist, gibt zu Ende des ersten Jahres $\frac{pk}{100}$ Thlr. Zinsen (§. 138); es ist also zu Anfange des zweiten Jahres zu $k + \frac{pk}{100} = k \times 1{,}0p$ durch dazu geschlagene Zinsen angewachsen. Im zweiten Jahre bringt dieses Kapital $\frac{k \times 1{,}0p \times p}{100}$ Thlr. Zinsen; es ist also zu Anfange

des dritten Jahres zu $k + \frac{(k \times 1{,}0p \times p)}{100} = k \times 1{,}0p \times 1{,}0p = k \times 1{,}0p^2$ Thlr. mittelst dazu geschlagener Zinsen angewachsen. Eben so würde die Größe des Kapitals und der zu selbigem geschlagenen Zinsen zu Anfange des 4ten Jahres $= k \times 1{,}0p^3$, zu Anfange des 5ten Jahres $= k \times 1{,}0p^4$ und zu Anfange des $n$ten Jahres $= k \times 1{,}0p^{n-1}$ Thlr. angewachsen seyn. Setzen wir, ein für allemal, den durch die angenommenen Procente bestimmten Decimalbruch $1{,}0p = p$, so daß

$p = 1{,}03$ bei 3 Procent-Zins,
$p = 1{,}04$ = 4 = =
$p = 1{,}045$ = $4\frac{1}{2}$ = = ꝛc. ist;

ferner das gegebene Kapital $= k$, die Jahre, während welcher dasselbe Zinsen bringt $= n$ und die etwa zu selbigen noch baar hinzu zu legenden Gelder (eine Vermehrung) $= +\nu$, so wie die etwa davon hinweg zu nehmenden Gelder (eine Verminderung) $= -\nu$, so können mittelst Reduction der nachstehenden Grundformeln alle in §. 141 folgende Aufgaben leicht aufgelöst werden.

Ein Kapital k ist nach n Jahren nebst den Zinsen und Zinseszinsen

$$1)\ s = kp^n$$

Die gesammten Zinsen, die das Kapital k während n Jahren gebracht hat, betragen demnach

$$2)\ z = kp^n - k = k(p^n - 1)$$

Die Vermehrung oder Verminderung $(\pm \nu)$, welche während m Jahren jährlich zu einem Kapital k gethan oder davon genommen wird, würde zu Ende des $m$ten Jahres zu folgenden Größen angewachsen seyn: die ersten ν Thlr. zu νp^m,

die 2ten ν = = νp^{m-1},
die 3ten ν = = νp^{m-2}, und
die $m$ten ν = = νp.

Da diese Größen eine geometrische Reihe bilden, deren Exponent $= p$, so ist nach §. 125 deren Summe $= \frac{\nu(p^{m+1} - p)}{p - 1}$

Ginge nun die Vermehrung oder Verminderung gleich mit dem Zeitpuncte an, wo das Kapital k ausgeliehen wurde, so würde diese Größe noch $n - m$ Jahre Zinsen bringen, die zu dem Kapital

geschlagen werden müßten, wenn ν eine Vermehrung ($+\nu$), und von dem Kapital abzuziehen wären, wenn ν eine Verminderung ($-\nu$) anzeigte. Jene Größe wäre nämlich am Ende des nt. J. zu $\frac{\nu(p^{m+1}-p)}{p-1} \times p^{n-m} = \frac{\nu(p^{n+1}-p^{n-m+1})}{p-1}$; folglich wäre das Kapital k zu Ende des $n$ten Jahres

$$3)\ s = kp^n + \frac{\nu(p^{n+1}-p^{n-m+1})}{p-1} = kp^n + \frac{\nu p(p^n-p^{n-m})}{p-1},$$

wenn eine Vermehrung, und

$$4)\ s = kp^n - \frac{\nu(p^{n+1}-p^{n-m+1})}{p-1} = kp^n - \frac{\nu p(p^n-p^{n-m})}{p-1}$$

wenn eine Verminderung statt fände.

Ginge die m Jahre dauernde Vermehrung oder Verminderung aber erst nach dem $r$ten Jahre an, so würde diese Größe noch $n-r-m$ Jahre Zinsen bringen; dieselbe wäre also zu Ende des $n$ten Jahres $= \frac{\nu(p^{m+1}-p)}{p-1} \times p^{n-r-m} = \frac{\nu(p^{n+1-r}-p^{n+1-r-m})}{p-1}$.

Das Kapital nebst allen Zinsen wäre sonach zu Ende d. $n$ten J.

$$5)\ s = kp^n + \frac{\nu(p^{n+1-r}-p^{n+1-r-m})}{p-1} = kp^n + \frac{\nu p(p^{n-r}-p^{n-r-m})}{p-1}$$

wenn ν eine Vermehrung, und

$$6)\ s = kp^n - \frac{\nu(p^{n+1-r}-p^{n+1-r-m})}{p-1} = kp^n - \frac{\nu p(p^{n-r}-p^{n-r-m})}{p-1}$$

wenn ν eine Verminderung anzeigte.

Fände dagegen bei der m Jahre dauernden Vermehrung oder Verminderung der Umstand statt, daß dieselbe zu Ende des $n-1$ten Jahres, oder, was gleich ist, zu Anfange des $n$ten Jahres das letztemal erfolgte, so wäre das Kapital nebst allen Zinsen:

$$7)\ s = kp^n + \frac{\nu(p^{m+1}-p}{p-1} = kp^n + \frac{\nu p(p^m-1)}{p-1},$$ wenn

ν eine Vermehrung, und

$$8)\ s = kp^n - \frac{\nu(p^{m+1}-p)}{p-1} = kp^n - \frac{\nu p(p^m-1)}{p-1},$$ wenn

ν eine Verminderung anzeigte.

Nimmt man nach und nach eine der, in einer der 8 Grundformeln enthaltenen Größen für die unbekannte an, und reducirt nach §. 40, so erhält man die anliegende Formeltafel, mittelst deren Anwendung die in folgendem §. stehenden Aufgaben aufgelöst werden können.

Grundf.	No	Gesucht wird	Formel.	Anmerkungen.
1	1	s	$s = kp^n$ od. $\log s = \log k + n \log p$	
	2	k	$k = \frac{s}{p^n}$ od. $\log k = \log s - n \log p$	
	3	n	$n = \frac{\log s - \log k}{\log p}$	
	4	p	$p = \frac{\log s - \log k}{n}$	
2	5	z	$z = k(p^n - 1)$	
	6	k	$k = \frac{z}{p^n - 1}$	
	7	n	$n = \log\left(\frac{z}{k} + 1\right) : \log p$	
3 u. 4	8	s	$s = kp^n \pm \frac{vp(p^n - p^{n-m})}{p-1}$	Bei Formel 8 gilt + v für eine Vermehrung, − v für eine Verminderung. Bei Formel 9 gilt + v für eine Verminderung, − v für eine Vermehrung. Bei Formel 10 gilt v wie bei 8; ist v eine Vermind., so multipl. man die Gleichung mit −1, um −v positiv zu bekommen.
	9	k	$k = \left[s \pm \frac{vp(p^n - p^{n-m})}{p-1}\right] : p^n$	
	10	v	$\pm v = \frac{(s - kp^n)(p-1)}{p(p^n - p^{n-m})}$	
5 u. 6	11	s	$s = kp^n \pm \frac{vp(p^{n-r} - p^{n-r-m})}{p-1}$	Hier gilt für v, was bei 8 gesagt ward.
	12	k	$k = \left[s \pm \frac{vp(p^{n-r} - p^{n-r-m})}{p-1}\right] : p^n$	Hier gilt für v, was bei 9 gesagt ward.
	13	v	$\pm v = \frac{(s - kp^n)(p-1)}{p(p^{n-r} - p^{n-r-m})}$	Hier gilt für v, was bei 10 gesagt ward.
7 u. 8	14	s	$s = kp^n \pm \frac{vp(p^m - 1)}{p-1}$	Hier gilt für v, was bei 8 gesagt ward.
	15	k	$k = \left[s \pm \frac{vp(p^m - 1)}{p-1}\right] : p^n$	Hier gilt für v, was bei 9 gesagt ward.
	16	v	$\pm v = \frac{(s - kp^n)(p-1)}{p(p^m - 1)}$	Hier gilt für v, was bei 10 gesagt ward.

§ 141.

1ste Aufgabe. Wie groß wird ein Kapital von 1200 Thlrn., das zu 4 p. C. ausgeliehen ist, samt den Zins und Zinseszinsen nach 10 Jahren seyn?

Aufl. Nach Formel 1 ist $\log s = \log k + n \log p$; da nun hier $k = 1200$, $n = 10$ und $p = 1{,}04$, so ist

$\log p = 1{,}04 = 0{,}0170333$

10

$10 \log 1{,}04 =$	0,1703330
$\log 1200 =$	3,0791812
$\log s =$	3,2495142.

Hierzu die Zahl = 1776,290.. = 1776 Thlr. 6 gr. 11,52 pf.

2te Aufgabe. Der jetzige Bestand eines Walddistrikts ist 2000 Klftrn., der jährliche Zuwachs $1\frac{1}{2}$ Procent; was wird der Bestand dieses Waldes nach 16 Jahren seyn?

Aufl. Nach Formel 1 ist derselbe = 2537,967.. Klftrn.

3te Aufgabe. Ein Kapital von 600 Thlrn. war während einer Reihe von Jahren durch dazu geschlagene Zinsen bis auf 1083 Thlr. 16 gr. angewachsen; wenn nun dasselbe zu 3 Procent ausgeliehen war, wieviel Jahre hatte es gestanden?

Aufl. Nach Formel 3 ist hier $n = \frac{\log 1083\frac{2}{3} - \log 600}{\log 1{,}03}$

$= \frac{\log 3{,}0348955 - \log 2{,}7781513}{\log 0{,}0128372} =$ 20 Jahre.

4te Aufgabe. Wieviel Jahre verfließen, ehe bei einem zu 5 Procent ausgeliehenen Kapital die Summe aller Zinsen = dem Kapital wird.

Aufl. Nach der 7ten Formel ist $n = \log\left(\frac{z}{k} + 1\right) : \log p$; da nun $z = k$ seyn soll, und p hier $= 1{,}05$, so wird $n = \log(1+1) : \log 1{,}05 = \frac{\log 0{,}3010300}{\log 0{,}0211893} = 14{,}2\ldots$ Jahre.

5te Aufgabe. Ein Kapital, das zu $3\frac{1}{2}$ Procent ausgeliehen war, hatte in $12\frac{1}{2}$ Jahren gerade 800 Thlr. Zins und Zinseszinsen gebracht; wie groß ist dieses Kapital?

Aufl. Nach Formel 6 ist hier $k = \frac{800}{1{,}035^{12\frac{1}{2}} - 1}$; diese Formel logarithmisch berechnet, macht folgendes Verfahren nöthig:

$\log 1{,}035 = 0{,}0149403$

$12\frac{1}{2}$

$12\frac{1}{2} \log 1{,}035 = 0{,}18675375$. Hierzu ist die Zahl = 1,537282.., diese um 1 vermindert und da mit $z = 800$ dividirt, gibt $k = \frac{800}{0{,}537282} = 1488{,}976..$ Thlr. = 1488 Thlr. 23 gr. 5,088 pf.

6te Aufgabe. Ein Kapital von 10,000 Thlr. ist zu 5 Procent mit der Bedingung ausgeliehen: daß zu Anfange eines jeden Jahres 1000 Thlr. weggenommen werden können, mit dieser Wegnahme aber sogleich begonnen und die darauf folgenden 7 Jahre fortgefahren werde, u. das dann noch Uebrige nebst allen eingegangenen Zinsen noch 12 Jahre stehen bliebe, so daß also das Grundkapital, unter den ausgesprochenen Bedingungen, auf 20 Jahre verliehen wäre. Wie groß ist die Summe, die am Ende des 20sten Jahres zurückgezahlt werden muß?

Aufl. Da hier $k = 10{,}000$, $v = -1000$, $n = 20$ und $m = 8$ und $p = 1{,}05$; so ist nach der 8ten Formel $s = 10000 \times 1{,}05^{20} - 1000 \times 1{,}05 \left(\frac{1{,}05^{20} - 1{,}05^{12}}{1{,}05 - 1}\right)$. Bedient man sich der Logarithmen, so ist

$\log 1{,}05 = 0{,}0211893$

20

$\log 1{,}05^{20} = 0{,}4237860$

$\log 10{,}000 = 4{,}0000000$

$4{,}4237860$ Hierzu die Zahl = 26532,98..

und zu $\log 1{,}05^{20} =$ wäre die Zahl = 2,653298..

und die zu $\log 1{,}05^{12} =$ gehörige Zahl = 1,795856..

folglich $1{,}05^{20} - 1{,}05^{12} = 0{,}857442$.

Nun ist:

log 1000 = 3,0000000
log 1,05 = 0,0211893
log 0,857442 = 0,9332047 — 1

2,9543940

log 0,05 = 0,6989700 — 2

— +

4,2554240

Hierzu ist die Zahl = 18006,28, und folglich ist s = 26532,98 — 18006,28 = 8526,7 Thlr. = 5526 Thlr. 16 gr. 9,6 pf.

7te Aufgabe. Ein Kapitalist will eine zu 4 Procent ausgeliehene Summe von 12000 Thlrn. in den nächsten 10 Jahren sammt Zinsen und Zinseszins so verzehren, daß er allemal zu Anfange eines jeden Jahres eine gleich große Summe x davon wegnimmt, und zwar so, daß er diese Summe das erstemal sogleich, das letztemal aber zu Anfange des 10ten Jahres wegnähme; wieviel wird derselbe jährlich verzehren können.

Aufl. Man setze, da zu Ende des n = 10ten Jahres nichts übrig seyn soll, in der 10ten Formel $s = 0$; so wird, da eine Verminderung statt findet, $-v = \frac{-/p^n(p-1)}{p(p^n-p^{n-m})}$ und durch Multiplication mit —1 folgt $v = \frac{kp^n(p-1}{p(^n-p^{n-m})}$. Da hier $m=n$, so verwandelt sich diese Formel noch in $v = \frac{kp^n(p-1)}{p(p^n-1)} = \frac{12000\times1{,}04^{10}(1{,}04-1)}{1{,}04(1\ 4^{10}-1)}$. Nun ist $1{,}04(1{,}04^{10}-1)=0{,}49945..$

Ferner ist, wenn man sich der Logarithmen bedient,

10 log 1,04 = 0,1703330
log 0,04 = 0,6020600 — 2
log 12000 = 4,0791812

2,8515742

log 0,49945.. = 0,6984920 — 1

— +

log v = 3,1530822

Hierzu ist die Zahl = 1422,597 = 1422 Thlr. 14 gr. 3,936 pf. = der jährlich zu verzehrenden Summe.

8te Aufgabe. Wenn dieselben Bedingungen wie in der vorigen Aufgabe statt finden, nur mit dem Unterschied: daß die jährlich zu verzehrenden v Thlr. anstatt zu Anfange, jedesmal zu Ende des Jahres weggenommen würden; was würde dann jährlich verzehrt werden können?

Aufl. Begreiflich ist es gleich, ob man annimmt, die ersten v Thlr. werden zu Ende des 1sten oder zu Anfange des 2ten Jahres weggenommen. Setzt man daher in der 13ten Formel $s = 0$ und $r = 1$; so wird dieselbe zu $-v = \frac{-kp^n(p-1)}{p(p^{n-1}-p^{-1})}$ und durch Reduction, wird $v = \frac{kp^n(p-1)}{p^n-1}$. Hier also wäre $v = \frac{12000 \times 1{,}04^{10}(1{,}04-1)}{1{,}04^{10}-1} = 1479{,}503.. = 1479$ T. 12 g. 0,864 pf.

9te Aufgabe. Ein Forstbezirk, der bei 10000 Cubikfuß Masse, jährlich $1\frac{3}{4}$ Procent Zuwachs enthält, soll die nächsten 10 Jahr mit allem Holzschlag verschont werden; mit Anfang des 11. und die darauf folgenden 9 Jahre aber sollen jedes Jahr 1000 Cbkfß. geschlagen werden; wieviel werden zu Ende des $n = 20$sten Jahres noch Cubikfuß vorhanden seyn?

Aufl. Nach Formel 14 sind dann noch 3132,91.. Cf. vorhanden.

10te Aufgabe. Wieviel würde man vom 11ten Jahre an schlagen müssen, damit unter den, in voriger Aufgabe ausgesprochenen Bedingungen, zu Ende des 20sten Jahres nichts mehr übrig wäre?

Aufl. Verfährt man hier mit der 16ten Formel so, wie mit der 10ten und 13ten Formel bei der 7ten und 8ten Aufgabe verfahren ward; so erhält man in $v = 1284{,}42..$ Cubikfuß die jährlich zu verschlagende Summe.

11te Aufgabe. Ein Forstbezirk, der bei $1\frac{1}{2}$ Procent Zuwachs, 8000 Klftr. Holzmasse enthält, soll, nachdem die ersten 10 Jahre jedes Jahr 500 Klftrn. geschlagen worden sind, in den folgenden $n - m$ Jahren so abgetrieben werden, daß man in jedem Jahre 800 Klftrn. daraus nimmt; wieviel Jahre wird man diese Summe entnehmen können?

Aufl. Man bestimme erst, nach der 8ten Formel, in welcher $m = n$ gesetzt wird, den Werth von s; nämlich diejenige Summe die nach der ersten 10jährigen Verminderung zu Ende des 10ten Jahres noch vorhanden seyn wird. Diese ist $= kp^n - \frac{vp(p^n-1)}{p-1}$

aus diesem Ausdrucke folgt $n = \log \left[\frac{s(p-1)-vp)}{k(p-1)-vp}\right] : \log p$.

Da nun hier $n = m = 10$, $p = 1{,}015$, $k = 8000$ und $v = 500$, so ist $s = 3852{,}98...$ Diese Größe 2 in den für n gefundenen Ausdruck, v aber $= 800$ gesetzt, gibt $n = 5{,}775..$ Jahre.

12te Aufgabe. Von einem Forstbezirk, der jetzo 12000 Klftrn. Holzmasse und $1\frac{1}{4}$ Procent Zuwachs hat, werden 6 Jahre hinter einander jährlich 800 Klftrn. entnommen; nach dieser Zeit wird derselbe 14 Jahre geschont, vom 21sten Jahre an aber soll derselbe so angegriffen werden, daß er zu Ende des 25sten Jahres gänzlich abgetrieben ist; wieviel Klftrn. wird man während der letzten 5 Jahre jährlich erhalten?

Aufl. Man setze in der 8ten Formel $m = 6$ und $n = 20$, und bestimme mittelst derselben den Werth von s, so hat man in s die zu Ende des 20sten Jahres vorhandene Masse. Diese Größe setze man für k in die 16te Formel, und nehme dabei $m = n = 5$. Man erhält nach der 8ten Formel $s =$

$$12000 \times 1{,}0125^{20} - \frac{800 \times 1{,}0125^{20}(1{,}0125^{20} - 1{,}0125^{15})}{1{,}0125 - 1}$$

$= 9417{,}06...$ und nach der 16ten Formel, bei welcher $s = 0$ zu setzen ist, $v = \frac{9417{,}06.. \times 1{,}0125^5 \times (1{,}0125-1)}{1{,}0125(1{,}0125^5-1)} =$

1930,5... Man wird also jedes Jahr noch 1930,5 Klaftern schlagen können. *

Anm. Die letzten zwei Aufgaben zeigen dem Anfänger, daß mittelst richtiger Anwendung der in §. 140 gegebenen 8 Grundformeln, noch Aufgaben, die andre Bedingungen enthalten, als die die Formeln der Tabelle besagen, aufzulösen möglich sind. Ich habe jedoch deßhalb nur wenige Aufgaben dieser Art hier aufgenommen, weil man

von der früheren Idee: daß Zuwachs von Zuwachs beim Holz erfolge, zurückgekommen ist; die Anwendung der zusammengesetzten Interessenrechnung in der forstwissenschaftlichen Mathematik sich nunmehro also blos auf die Waldwerthberechnung beschränkt, und ich diesen Gegenstand in dem folgenden Kapitel noch besonders behandle. — Ausführlicher findet der Forstmann die zusammengesetzte Interessenrechnung behandelt, und auf Berechnung des Zuwachses angewandt, in Fischers Forstrechnungs-Aufgaben; Dresden, bei Arnold.

Drittes Kapitel.

Anwendung der einfachen und zusammengesetzten Interessenrechnung bei der Waldwerthberechnung.

§. 142.

Die in §. 143 folgenden 10 Aufgaben sind nur für solche Fälle gebildet, die wirklich bei der Waldwerthberechnung vorkommen können. Mehrere andere Bedingungen enthaltende Aufgaben folgen zu lassen, hielt ich aus der eben ausgesprochenen Ansicht für unzweckmäßig. Die Aufgaben selbst sind doppelt aufgelöst, nämlich einmal nach der einfachen und einmal nach der zusammengesetzten Interessenrechnung. Dabei steht das Resultat der ersten Rechnung zuerst, das der letzteren aber zuletzt. Die Formeln zu Auflösung dieser Aufgaben, bei einfachem Zins sowohl als bei Zinses-Zins, enthält die anliegende Tabelle. Die Auflösungen selbst sind nicht ausgeführt, sondern den Resultaten derselben steht nur die Nummer vor, unter welcher die Formel in der Tabelle zu finden ist.

Die Entwickelung dieser Formeln aus den Bedingungen der Aufgaben hier umständlich anzugeben, hätte mich zu weit vom Zwecke abgeführt; sie gründet sich auf die, im ersten und zweiten Kap. dieses Abschnittes angegebenen allgemeinen Formeln.

Der Wißbegierige findet die, bei Anwendung der zusammengesetzten Interessenrechnung gebrauchten Formeln umständlich entwikkelt, in meiner Anweisung zur Waldwerthberechnung; Leipzig, bei Hartmann.

Formeln zur Auflösung der, über Waldwerthberechnung gegebenen Aufgaben.

Bedingung der Aufgabe.	Nr	Formeln bei einfachem Zins.	Formeln bei Zinseszins.
Die Rente r beginnt zu Ende des Kaufjahres und dauert immer fort.	1	$k = \frac{rc}{p}$	$k = \frac{rc}{p}$
Die Rente r beginnt zu Ende des m+1ten Jahres und dauert immer fort.	2	$k = \frac{rc^2}{p(mp+c)}$	$k = \frac{rc}{ph^m}$
Die Rente r beginnt zu Ende des Kaufjahres, dauert n J. und a) hört dann für immer auf, oder b) beginnt, nachdem m Jahre nichts erfolgt ist, zu Ende des m+nten Jahres von Neuem u. geht in diesem periodischen Wechsel fort.	3	$k = \frac{nr[2c+p(n-1)]}{2(c+pn)}$	$k = \frac{rc(h^n-1)}{ph^n}$
	4	$k = \frac{nr[2c+p(n-1)](c+pm)}{2cp(m+n)}$	$k = \frac{rh^m(h^n-1)}{(h-1)(h^{n+m}-1)}$
Die Rente r beginnt zu Ende des m+1ten Jahres, dauert n J. und a) hört dann für immer auf, oder b) beginnt, nachdem q Jahre nichts erfolgt ist, wieder von Neuem und geht in diesem periodischen Wechsel so fort: daß allemal n J. Rente und q J. nichts erfolgt. Ist aber c) q=m, so wird	5	$k = \frac{nr[2c+p(n-1)]}{2[c+p(m+n)]}$	$k = \frac{rc(h^n-1)}{ph^{m+n}}$
	6	$k = \frac{nr[2c+p(n-1)](c+pq)}{2p(q+n)(c+pm)}$	$k = \frac{rh^q(h^n-1)}{h^m(h-1)(h^{q+n}-1)}$
	7	$k = \frac{nr[2c+p(n-1)]}{2p(q+n)}$	$k = \frac{r(h^n-1)}{(h-1)(h^{q+n}-1)}$

Anmerk. Bei vorstehenden Formeln ist p = den gegebenen Procenten, h = 1,0p, c = 100 und k = dem zu bestimmenden Waldwerthe. Die Werthe der übrigen Buchstaben sind durch die Bedingungen bezeichnet.

§. 143.

Aufgaben.

1ste Aufgabe. Ein Wald gibt im 20sten Jahre das erstemal eine dann für immer gleichbleibende Rente von 600 Thalern; was ist dessen Werth bei 4 Procent Zins?

Antw. No. 2 $\begin{cases} 8522\frac{8}{11} \text{ Thlr.} = 8522 \text{ Thlr. } 17 \text{ gr. } 5\frac{5}{11} \text{ pf} \\ 7119{,}648 \text{ Thlr.} = 7119 \text{ Thlr. } 15 \text{ gr. } 6 \text{ pf.} \end{cases}$

2te Aufgabe. Ein Holzhändler kauft einen, mit haubaren Fichten bestandenen Walddistrikt von 9 Ackern Fläche unter der Bedingung: das darauf stehende Holz in den nächsten 8 Jahren so zu benutzen, daß er jedes Jahr eine gleich große Quantität Holz daraus entnimmt. Der Verkäufer hat früher für einen ähnlichen Acker, der jedoch sogleich benutzt ward, 800 Thlr. erhalten; was wird der Verkäufer zahlen können, wenn er bei der successiven Benutzung den Verlust der Interessen mit 4 Procent in Anschlag bringt?

Antw. No. 3 $\begin{cases} 6218\frac{8}{11} \text{ Tlr.} = 6218 \text{ Tlr. } 17 \text{ gr. } 5\frac{5}{11} \text{ pf.} \\ 6059{,}47.. \text{ Tlr.} = 6059 \text{ Tlr. } 11 \text{ gr. } 3 \text{ pf.} \end{cases}$

3te Aufgabe. Ein auf Ausschlagwald bewirthschaftetes Revier liefert allemal 5 Jahre hinter einander eine jährliche Rente von 200 Thlrn. und die darauf folgenden 15 Jahre nichts. Wenn nun zu Ende des Kaufjahres die erste der 5jährigen Renten eingehet, was ist dann der Werth dieses Reviers bei $3\frac{1}{2}$ Procent Zins?

Antw. No. 4 $\begin{cases} 2331\frac{1}{14} \text{ Thlr.} = 2331 \text{ Thlr. } 1 \text{ gr. } 8\frac{4}{7} \text{ pf.} \\ 1815{,}332.. \text{ Thlr.} = 1815 \text{ Thlr. } 7 \text{gr. } 11 \text{pf.} \end{cases}$

4te Aufgabe. Von einem Waldbesitzer wird das Holz eines 60jährigen Fichtenbestandes von 12 Ackern Fläche, unter der Bedingung an ein Hammerwerk verkauft: daß dasselbe diesen Bestand erst mit dem 11ten Jahre nach dem Kauf abzutreiben anfange, und in jedem der darauf folgenden 9 Jahre eine gleich große Quantität, die von dem Verkäufer mit 600 Thlrn. pro Acker in Anschlag gebracht worden, benutze; was wird der Käufer jetzo, bei $4\frac{1}{2}$ Procent Zins, zahlen können?

Antw. No. 5 $\begin{cases} 4556\frac{1}{1\frac{8}{9}} \text{ Tlr.} = 4556 \text{ Tlr. } 20 \text{ gr. } 2\frac{1}{1\frac{8}{9}} \text{ pf.} \\ 3668{,}56.. \text{ Tlr.} = 3668 \text{ Tlr. } 13 \text{ gr. } 5 \text{ pf.} \end{cases}$

5te Aufgabe. Was würde der Werth des, in der dritten Aufgabe geschriebenen Reviers seyn, wenn vor der Hand keine Rente erfolgte und von dem 15 jährigen Stillstande erst 6 Jahre verflossen wären, so daß erst im 10ten Jahre nach dem Kaufe die erste der 5 jährigen Renten erfolgte?

Antw. No. 6 $\begin{cases} 1772\frac{1248}{1841} \text{ Tlr.} = 1772 \text{ Tlr. } 16 \text{ gr. } 3\frac{429}{1841} \text{ pf.} \\ 1331{,}97 \text{ Thlr.} = 1331 \text{ Thlr. } 23 \text{ gr. } 3 \text{ pf.} \end{cases}$

6te Aufgabe. Was wäre aber der Werth dieses Reviers, wenn die 5 jährige Rente das erstemal im 16ten Jahre nach dem Kaufe erfolgte, so nämlich, daß dieselbe im Kaufjahre das letztemal erfolgt wäre?

Antw. No. 7 $\begin{cases} 1528\frac{4}{7} \text{ Thlr.} = 1528 \text{ Thlr. } 13 \text{ gr. } 8\frac{4}{7} \text{ pf.} \\ 1083{,}56 \text{ Thlr.} = 1083 \text{ Thlr. } 13 \text{ gr. } 5 \text{ pf.} \end{cases}$

7te Aufgabe. Ein Privatmann gedenkt einen Walddistrikt, der zeithero aller 30 Jahre eine 6 jährige Rente von 450 Thlrn. lieferte, zu verkaufen. Die letzte der 6 jährigen Renten war vor 16 Jahren eingegangen, die erste erfolgt daher im 9ten Jahre nach dem Kaufe; was ist der Werth dieses Distrikts bei 4 Procent Zins?

Antw. No. 6 $\begin{cases} 3675 \text{ Thlr.} \\ 2491{,}99.. \text{ Thlr.} = 2491 \text{ Thlr. } 23 \text{ gr. } 9 \text{ pf.} \end{cases}$

8te Aufgabe. Von einem bei 25 jährigem Umtriebe auf Ausschlagwald bewirthschafteten Reviere soll eine Parcelle verkauft werden, die 10 Jahre hinter einander jährlich 250 Thlr., die darauf folgenden 15 Jahre aber nichts rentiret. Zur Kaufzeit sind von der 10 jährigen Rente eben 4 Jahre benutzt worden; was ist der Werth dieser Parcelle bei 5 Procent Zins?

Aufl. Nach No. 3 ist der Werth einer 6 Jahre dauernden Rente $= \begin{cases} 1298\frac{1}{1\frac{1}{3}} \text{ Thlr.} \\ 1268{,}88 \text{ =} \end{cases}$ Hierzu kommt, nach No. 6, der Werth einer 10 Jahre dauernden Rente, die das erstemal in $6 + 15 = 21$

Jahren, in der Folge aber alle 15 Jahre beginnt; dieser letztere Werth ist $\begin{cases} 2143\frac{3}{4} \text{ Thlr.} \\ 1032{,}44\ldots = \end{cases}$ folglich ist der Waldwerth

$\begin{cases} 1298\frac{1}{13} + 2143\frac{3}{4} = 3441 \text{ Thlr. } 19 \text{ gr. } 10\frac{2}{13} \text{ pf.} \\ 1268{,}88 + 1032{,}44 = 2301 \text{ Thlr. } 7 \text{ gr. } 8 \text{ pf.} \end{cases}$

9te Aufgabe. Was ist der in der ersten Aufgabe beschriebene Wald, bei 5 Procent Zins, werth?

Antw. No. 2 $\begin{cases} 6153\frac{1}{13} \text{ Thlr.} = 6153 \text{ Thlr. } 20 \text{gr. } 3\frac{9}{13} \text{pf.} \\ 4748{,}8 \text{ Thlr} = 4748 \text{ Thlr. } 19 \text{ gr. } 2 \text{ pf.} \end{cases}$

10te Aufgabe. Was ist der Werth des in der 3ten Aufgabe angeführten Waldes bei 5 Procent Zins?

Antw. No. 4. $\begin{cases} 1925 \text{ Thlr.} \\ 1389{,}63 \text{ Thlr.} = 1389 \text{ Thlr. } 15 \text{ gr. } 1 \text{ pf.} \end{cases}$

Ein Vergleich der Resultate der 9ten und 10ten Aufgabe mit denen der ersten und dritten, zeigt:

1) daß höhere Procente den Waldwerth erniedrigen, niedrige aber denselben erhöhen; dies findet bei allen Aufgaben, die durch die gegebenen Formeln aufgelöst werden können, statt;

2) daß der Unterschied zwischen den Resultaten der einfachen und zusammengesetzten Interessenrechnung größer wird bei höheren, und kleiner bei niedrigen Procenten; dieser Unterschied war bei der 1sten Aufgabe 8522,727.. — 7119,648.. = 1403,079 Thlr.; dagegen ist derselbe bei der 9ten Aufgabe 6153,84.. — 4748,8.. = 1405,04 Thlr. Bei der 3ten Aufgabe aber war derselbe 2331,071 — 1815,332 = 515,739 Thlr., dagegen war bei der 10ten Aufgabe 1925 — 1389,63 = 535,37 Thlr.

Zehnter Abschnitt.

Auflösung der höheren Gleichungen.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Eigenschaften der höheren Gleichungen.

§. 144.

Jede höhere Gleichung wird nach dem höchsten Exponenten der unbekannten Größe benamt; sie heißt daher eine cubische, wenn derselbe $=3$, eine biquadratische, wenn er $=4$ und überhaupt eine vom $n$ten Grade, wenn n der höchste Exponent der unbekannten Größe ist.

Kommt die unkannte Größe nur in einerlei Potenz stehend vor, so heißt die Gleichung eine reine, im Gegensatz zu einer verwickelten, wo außer der höchsten Potenz die unbekannte Größe noch in niedrigern Potenzen stehend, erscheint; die letztere ist wieder vollkommen, wenn die unbekannte Größe in allen Potenzen, von der höchsten bis zu der ersten, vorkommt. Als Beispiele dienen folgende Gleichungen:

$ax^3 \pm bx^3 \pm cx^3 = \pm d$ ist eine reine cubische Gleichung.

$ax^4 \pm bx^4 \pm cx^4 = \pm g$ ist eine reine biquadratische Gleichung.

$ax^n \pm bx^n \pm cx^n = h$ ist eine reine Gleichung vom $n$ten Grade.

$ax^3 \pm bx^2 \pm cx = d$ ist eine vollkommne verwickelte cubische Gl.

$ax^4 \pm bx^3 \pm cx^2 \pm dx = g$ ist eine vollkommne verwickelte biquadratische Gleichung.

$ax^n \pm bx^{n-1} \pm cx^{n-2} \ldots \pm mx = p$ ist eine vollkommne verwickelte Gleichung vom $n$ten Grade.

$ax^3 \pm bx = c$
$ax^3 \pm bx^2 = g$
} sind unvollkommne verwickelte cubische Gleichungen.

$ax^4 \pm bx = h$
$ax^4 \pm cx^2 \pm dx = p$
} sind unvollkommne verwickelte biquadratische Gleichungen.

§. 145.

Die reinen höheren Gleichungen nennt man auch Gleichungen von zwei Theilsätzen, weil sich solche stets auf zwei Glieder bringen lassen; denn die ersten drei, der in vorigem §. angeführten Gleichungen lassen sich durch Reduction auf den Ausdruck

1) $(a+b+c)x^3 = d$ oder $x^3 = \frac{d}{a+b+c}$

2) $(a+b+c)x^4 = g$ oder $x^4 = \frac{g}{a+b+c}$

3) $(a+b+c)x^n = h$ oder $x^n = \frac{h}{a+b+c}$

bringen. Ihre Auflösung ist, in Verhältniß zu den verwickelten höheren Gleichungen, sehr leicht; sind solche nämlich auf die eben angeführten Ausdrücke gebracht — wozu die im vierten Kapitel des zweiten Abschnittes gegebenen Regeln hinreichend sind — so darf nur auf beiden Seiten der Gleichung die $n$te Wurzel ausgezogen werden, um in ihr den Werth der unbekannten Größe zu erhalten. Bei den obigen Beispielen wäre nämlich:

ad 1) $x = \sqrt[3]{\frac{d}{a+b+c}}$ 2) $x = \sqrt[4]{\frac{g}{a+b+c}}$ 3) $x = \sqrt[n]{\frac{h}{a+b+c}}$

Aus dieser Rücksicht folgen über Gleichungen dieser Art keine besonderen Aufgaben und ferneren Erläuterungen, sondern das Folgende bezieht sich auf die verwickelten höheren Gleichungen.

Jede höhere Gleichung (auch die reine) läßt für die unbekannte Größe soviel Werthe zu, als der höchste Exponent der un-

kannten Größe Einheiten hat; demnach gibt die cubische Gleichung 3, die biquadratische 4 und die Gleichung vom *n*ten Grade *n* Werthe für die unbekannte Größe.

Diese Werthe heißen die Wurzeln der Gleichung und können theils rational, (commensurabel), theils irrational (incommensurabel), theils imaginär seyn. In den mehrsten Fällen ist es jedoch hinlänglich, eine von diesen *n* Wurzeln zu bestimmen.

Jede dieser Wurzeln, an die Stelle der unbekannten Größe in die Gleichung gesetzt, muß daher begreiflich der Gleichung Gnüge leisten, das heißt selbige auf 0 bringen, wenn die Gleichung selbst auf 0 reducirt steht.

§. 146.

Jede höhere Gleichung steht geordnet: wenn man dieselbe auf Null reducirt, die Potenzen der unbekannten Größe aber so auf einander folgen läßt, daß x in der höchsten Potenz mit dem positiven Zeichen und dem Coefficienten 1 das erste Glied, x^0 aber das letzte Glied bildet; so steht z. B. die Gleichung $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$, geordnet.

Jede vollkommene verwickelte höhere Gleichung vom *n*ten Grade hat, wenn sie geordnet steht, $n+1$ Glieder.

§. 147.

Eine vollkommene geordnete höhere Gleichung hat soviel positive Wurzeln als Abwechselungen der Zeichen ($\pm$) bei ihren Gliedern vorkommen, und soviel negative Wurzeln als Folgen dieser Zeichen in der geordneten Gleichung erscheinen. Eine Abwechselung aber nennt man: wenn auf ein positives Glied ein negatives oder auf ein negatives ein positives Glied folgt; dagegen heißt es eine Folge, wenn auf ein positives ein positives, auf ein negatives aber ein negatives Glied folgt. So hat z. B. die Gleichung $x^5 + 4x^4 - 13x^3 - 27x^2 + 96x - 24 = 0$

zwei Folgen ($+x^5 + 4x^4$ und $-13x^3 - 27x^2$) und drei Abwechselungen ($+4x^4 - 13x^3$; $-27x^2 + 96x$ und $+96x - 24$); sie hätte also 2 negative und 3 positive Wurzeln.

§. 148.

Bei jeder höheren Gleichnng entfernt man die gebrochenen Coefficienten, wenn man eine Größe (den Generalnenner) aufsucht, die sich durch jeden Nenner der, in der Gleichung vorkommenden Brüche, ohne Rest theilen läßt und unter die Glieder der geordneten höheren Gleichung eine geometrische Reihe so schreibt, daß das erste Glied derselben $= 1$ unter das erste Glied der Gleichung, das zweite Glied der Reihe $=$ der angenommenen Größe, unter das zweite Glied der Gleichung u. s. f. zu stehen kommt.*) Multiplicirt man nun alle Glieder der Gleichung mit den unter denselben stehenden Gliedern der Reihe, so erhält man eine Gleichung ohne Brüche. Als Beispiel gelte die Gleichung

$$ax^4 + \frac{bx^3}{2} - \frac{cx^2}{4} + \frac{dx}{3} - \frac{e}{6} = 0.$$

Sie wird zu

$$x^4 + \frac{bx^3}{2a} - \frac{cx^2}{4a} + \frac{dx}{3a} - \frac{e}{6a} = 0.$$

Der Generalnenner sämmtlicher Brüche $= 12a =$ dem zweiten Gliede (oder Exponenten) der Reihe; es stände also:

$$x^4 + \frac{bx^3}{2a} - \frac{cx^2}{4a} + \frac{dx}{3a} - \frac{e}{6a} = 0.$$

$$1 \quad 12a \quad 12^2a^2 \quad 12^3a^3 \quad 12^4a^4$$

und die Multiplication ausgeführt, dabei aber auch gehörig gehoben, gibt $x^4 + 6bx^3 - 36acx^2 + 576a^2dx - 3456a^3e = 0.$

---

*) Natürlich ist dieses zweite Glied zugleich der Exponent der Reihe, da das erste Glied $= 1$; man erhält also alle andere Glieder nach §. 124.

Durch diese Operation werden jedoch begreiflich die Wurzeln der Gleichung vergrößert, und zwar um sovielmal, als der gebrauchte Generalnenner Einheiten enthält. Die für die transformirte Gleichung gefundenen Wurzeln müssen deßhalb durch diesen Generalnenner dividirt werden, um in dem Quotienten die Wurzeln der gegebenen Gleichung zu bekommen. Wäre bei unserm Beispiele m eine Wurzel der transformirten Gleichung, so wäre $\frac{m}{12a}$ eine Wurzel der gegebenen Gleichung $ax^4 + \frac{bx^3}{2}$ ꝛc.

Im Gegentheil lassen sich die Wurzeln einer gegebenen Gleichung in dem Falle verkleinern: wenn sich alle Coefficienten der Gleichung durch die unter sie gesetzten Glieder einer geometrischen Reihe ohne Rest theilen lassen. Wäre z. B. die Gleichung $x^3 - 6x^2 + 56x + 64 = 0$ gegeben, so wäre die zu bildende Reihe $= 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8$, also die transformirte Gleichung $x^3 - 3x^2 + 14x + 8 = 0$, deren Wurzeln mit 2 zu multipliciren wären. Dieses Verkleinern der Wurzeln gewährt bei der, im folgenden Kapitel gelehrten Auflösungsmethode den Vortheil, daß man für das letzte Glied weit weniger Factoren erhält, folglich weit schneller zum Ziele kommt; dagegen wird, mittelst des dort beschriebenen Verfahrens, durch das Vergrößern der Wurzeln oft eine ganze Wurzel erhalten, wo dieselbe außerdem als Bruch erschienen und vielleicht für irrational gehalten worden wäre.

§. 149.

Aus jeder verwickelten höheren Gleichung läßt sich das zweite Glied weg- und hineinschaffen.

Um dasselbe wegzuschaffen, dividire man den Coefficienten dieses Gliedes durch den höchsten Exponenten der unbekannten Größe, setze diesen Quotienten mit seinem Zeichen zu x, diese beiden Größen aber $= y$ und substituire endlich diesen Werth für x in die gegebene Gleichung. Sollte z. B. aus der Gleichung $x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 30x - 28 = 0$ das Glied $-5x^3$ wegge-

schafft werden, so ist, da 4 der höchste Exponent von x, der Quotient $\frac{5}{4}$ und $x-\frac{5}{4}=y$, folglich $x=y+\frac{5}{4}$. Nun ist

$$x^4 = (y+\tfrac{5}{4})^4 = y^4+5y^3+\frac{75y^2}{8}+\frac{125y}{16}-\frac{625}{256}$$

$$-5x^3 = -5(y+\tfrac{5}{4})^3 = -5y^3-\frac{75y^2}{4}-\frac{375y}{16}-\frac{625}{64}$$

$$+7x^2 = 7(y+\tfrac{5}{4})^2 = 7y^2+\frac{35y}{2}+\frac{175}{16}$$

$$+30x = 30(y+\tfrac{5}{4}) = 30y+\tfrac{75}{2}$$

$$-28 = -28$$

---

also $x^4-5x^3+7x^2+30x-28=y^4-19y^2+\frac{255y}{8}+\frac{3357}{256}$ eine Gleichung, in welcher das zweite Glied (y^3) fehlt.

Hineinschaffen läßt sich das fehlende zweite Glied: wenn man $x=y\pm a$ setzt, wo für a jede beliebige Zahl genommen werden kann, und zwar muß selbige negativ genommen werden, wenn die Wurzeln der transformirten Gleichung größer, und positiv, wenn selbige kleiner werden sollen. Wäre z. B. bei der Gleichung $x^3-20x+12=0$ das fehlende zweite Glied hineinzuschaffen, und zwar so, daß die transformirte Gleichung größere Wurzeln als die gegebene haben sollte, so setze man $a=+2$, also $x=y+2$ und man erhält in

$$x^3 = (y+2)^3 = y^3+6y^2+12y+8$$

$$-20x = -20(y+2) = -20y-40$$

$$12 = 12$$

$x^3-20x+12=y^3+6y^2-8y-20$ eine Gleichung, in welcher das zweite Glied vorhanden ist.

§. 150.

Eine jede höhere Gleichung kann man sich als aus dem Producte so vieler Binomial-Factoren von der Form $x+a$, $x+b$ ꝛc. entstanden denken, als der höchste Exponent der unbekannten Größe Einheiten hat. Wird einer dieser Factoren (gleichviel welcher) $=0$ gesetzt, so wird begreiflich das ganze Product $=0$.

Wären z. B. a, b, c, d die Wurzeln einer biquadratischen Gleichung (welche sowohl positiv als negativ gedacht werden können), so kann man sich die Gleichung als durch die Multiplication der 4 Factoren $x+a$, $x+b$, $x+c$ und $x+d$ entstanden denken. Es wäre nämlich $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 + (abc+abd+acd+bcd)x + abcd$.

Diese allgemeine Gleichung, deren Wurzeln bekannt sind, zeigt uns folgende merkwürdige Eigenschaften, die jeder Gleichung zukommen.

1) Der Coefficient des zweiten Gliedes besteht aus der Summe aller Wurzeln, oder aus der Summe aller Combinationen zu je 1 der n Wurzeln.

2) Der Coefficient des dritten Gliedes ist $=$ der Summe der Producte aus je 2 Wurzeln, oder $=$ der Summe der zu einander addirten Combinationen zu je 2 der n Wurzeln.

3) Der Coefficient des vierten Gliedes ist $=$ der Summe der Producte aus je 3 Wurzeln oder $=$ der Summe der zu einander addirten Combinationen zu je 3 der n Wurzeln.

4) Der Coefficient des $n$ten (hier letzten Gliedes ist $=$ der Summe der Producte aus je $n-1$ Wurzeln, oder $=$ der Summe der zu einander addirten Combinationen zu je $n-1$ der n Wurzeln.

5) Der Coefficient des $n+1$ten Gliedes ist $=$ dem Producte aus allen n Wurzeln oder $=$ der einzigen Combination, die zu je n aus n Wurzeln gebildet werden kann. Aus dem letzteren Punkte geht hervor, daß, wenn eine höhere Gleichung eine oder mehrere rationale Wurzeln hat, dieselben als Factoren in dem letzten ganz bekannten Gliede enthalten seyn müssen; bringt aber keiner dieser Factoren, für x in die geordnete höhere Gleichung gesetzt (sowohl positiv als negativ), dieselbe auf Null, so hat die Gleichung auch keine durch eine ganze Zahl darstellbare Wurzel, d. h. jede beliebige ganze Zahl für x in die Gleichung gesetzt, gibt den zweiten Theil der Gleichung größer oder kleiner als Null.

§. 151.

Die Auflösung der höheren Gleichungen geschieht entweder mittelst Formeln, oder durch Aufsuchung von $n-2$ ihrer Wurzeln.

Hat man nämlich eine oder einige Wurzeln bestimmt, so setze man selbige mit dem entgegengesetzten Zeichen zu x und dividire mit dieser Größe (die begreiflich $=0$) die geordnete Gleichung. Der Quotient, der ebenfalls $=0$, wird eine Gleichung bilden, die um soviel Grade niedriger als die gegebene ist, als wievielmal man die Division mit $x \pm$ der gefundenen Wurzeln ausführte, nämlich um soviel Grade, als Wurzeln bereits bekannt sind. Bei der cubischen Gleichung brauchten sonach nur eine, bei der biquadratischen 2.., bei der von $n$ten Grade aber $n-2$ Wurzeln bekannt zu seyn, um die übrigen 2 unbekannten aus dem erhaltenen Quotienten (der unter diesen Voraussetzungen stets eine verwickelte quadratische Gleichung bilden würde) nach §. 92 zu bestimmen.

Die Auflösung der cubischen Gleichungen kann mittelst der sogenannten Cardanischen *) und die der biquadratischen mittelst der Bombellischen **) Formel bewirkt werden. Für die Auflösung höherer Gleichungen als die des vierten Grades, hat man bis jetzo noch keine allgemeinen Formeln.

*) Anmerk. Die Auffindung dieser Formel schreiben einige dem Scipio Ferreus, andre dem Tartalea zu. Cardano (geboren zu Pavia 1501, Lehrer der Mathematik und Medicin zu Mayland ꝛc.) bildete dieselbe zum allgemeinen Gebrauch mehr aus und machte sie im Jahre 1545 zuerst durch den Druck bekannt.

**) Anmerk. Bombelli beschreibt schon im Jahre 1589 in einem von ihm herausgegebenen Lehrbuche der Algebra, wie man die biquadratischen Gleichungen mittelst der cardanischen Formel auf 2 quadratische Gleichungen bringen könne.

§. 152.

Den gegebenen Erläuterungen zufolge würde die Auflösung der höheren Gleichungen zu bewirken seyn

1) mittelst Aufsuchung von $n - 2$ ihrer rationalen Wurzeln;

2) mittelst der Cardanischen und Bombellischen Formel;

3) mittelst Aufsuchung ihrer irrationalen Wurzeln durch Näherung.

Jede dieser Methoden soll in einem der folgenden Kapitel abgehandelt, im 5ten Kapitel aber eine allgemeine Eliminationsmethode, auf höhere Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen angewandt, erläutert werden.

Zweites Kapitel.

Auflösung höherer Gleichungen, mittelst des Aufsuchens ihrer rationalen Wurzeln.

§. 153.

Das folgende Verfahren wird durch die im vorigen Kapitel angegebenen allgemeinen Eigenschaften der höheren Gleichungen, vorzüglich aber durch die, in den §§en. 147, 148, 150 ausgesprochenen Gesetze begründet. Es soll umständlich an einem besondern Beispiel, nämlich an der Gleichung $x^4 - x^3 - 16x^2 + 4x + 48 = 0$ gezeigt und erklärt worden.

Man untersucht nach §. 147: ob die Gleichung positive und negative Wurzeln haben kann; ist dies der Fall, so müssen die Factoren des letzten Gliedes sowohl positiv als negativ bei der folgenden Tabelle angesetzt werden, im Gegentheil aber nur mit dem Zeichen, welches der Wurzel zukommt. In unserm Beispiel finden sich 2 Abwechselungen und 2 Folgen, also sind 2 Wurzeln positiv und 2 negativ.

Hierauf untersuche man ferner, ob ± 1 für x gesetzt, die geordnete Gleichung auf Null bringt, was stets nur sehr wenig Rechnung verursacht. Hier ist dies der Fall nicht, daher können auch ± 1 bei dem Ansatz der Factoren weggefallen.

Nun suche man nach den, in §. 6 gegebenen Regeln alle

Factoren des letzten Gliedes der geordneten Gleichung. Sie sind in unserm Beispiele 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 und 48. Diese setze man einmal mit dem positiven und einmal mit dem negativen Zeichen in eine Horizontalreihe (man vergl. mit der folgenden Beschreibung die nachstehende Tabelle), und zwar so, daß der höchste positive Factor anfängt, dann der Größe nach alle übrige positive Factoren folgen, sodann der kleinste negative Factor, und als letztes Glied der Reihe der größte negative Factor folgt.

Nun dividire man den höchsten Factor, d. h. die Zahl 48, selbst, bei welcher Division jedoch das Zeichen, womit dieselbe in der Gleichung erscheint, genau zu beachten, mit allen andern Factoren und setze die Quotienten unter die Divisoren, so erhält man in letzteren die zweite Horizontalreihe der Tabelle.

48	+	24	+	16	+	12	+	8	+	6	+	4	+	3	+	2	−	2	−	3	−	4	−
1	+	2	+	3	+	4	+	6	+	8	+	12	+	16	+	24	−	24	−	16	−	12	−
5	+	6	+	7	+	8	+	10	+	12	+	16	+	20	+	28	−	20	−	12	−	8	−
.		.		.		.		.	+	2	+	4		.	+	14	+	10	+	4	+	2	
									−	14	−	12			−	2	−	6	−	12	−	14	
									.	−	3				−	1	+	3	+	4		.	
										−	4				−	2	+	2	+	3			
										−	1				−	1	−	1	−	1			
										0					0		0		0				

Diese ist allemal die umgekehrte erste Reihe (von der Mitte ± 2 an gerechnet), wenn man zu ihr die Factoren ± 1 setzt, die Factoren ± 48 aber wegläßt; die Glieder behalten dabei ihre Zeichen, wenn die Zahl (hier 48) in der Gleichung positiv, und die Zeichen werden in die entgegengesetzten verwandelt, wenn die Zahl negativ in der geordneten Gleichung erscheint. Zu jedem Gliede dieser zweiten Reihe addire man den Coefficienten des vorletzten Gliedes der geordneten Gleichung, hier $+ 4$, so erhält man die dritte Reihe. Wäre aber dieser Coefficient, oder irgend einer der folgenden $= 0$, d. h. fehlte ein Glied der Gleichung, so bliebe begreiflich die Reihe durch Addition von 0 ungeändert und wäre daher zur folgenden Division sogleich bereit.

Von dieser dritten Reihe dividire man alle diejenigen Glieder, die bei der Division zum Quotienten eine ganze Zahl ohne Rest ge-

ben, durch die senkrecht über ihnen stehenden Glieder der ersten Reihe, nämlich $+12 : +6 = +2$, $+16 : +4 = +4$, $-20 : -2 = +10$ u. s. w., so erhält man in diesen Quotienten die vierte Horizontalreihe. Da, wo die Division nicht ohne Rest aufgeht, zeigt es an, daß die darüber stehenden Factoren keine Wurzeln der Gleichung seyn können; man durchstreiche dieselben daher, oder unterpunctire solche.

Zu dem erhaltenen Quotienten addire man wiederum den Coefficienten des folgenden Gliedes der geordneten Gleichung, hier $= -16$, so erhält man die fünfte Reihe.

Von dieser fünften Reihe werden, wie bei der dritten, alle Glieder durch die in der ersten Reihe über ihnen stehenden Factoren dividirt, die Quotienten aber nur dann in die sechste Reihe gesetzt, wenn die Division ohne Rest aufgehet; dies findet nur bei -12, -2, -6 und -12 statt; alle übrigen werden durchstrichen oder unterpunctirt.

Zu den erhaltenen Quotienten -3, -1, $+3$ und $+4$ addire man den Coefficienten -1 des nächstfolgenden Gliedes, und man erhält in -4, -2, $+2$ und $+3$ die siebente Reihe.

Dividirt man diese Größen abermals auf die vorbeschriebene Art, so erhält man in -1, -1, -1 und -1 die achte Reihe, und zu dieser den Coefficienten 1 des noch übrigen ersten Gliedes der geordneten Gleichung addirt, bringt alle 4 Glieder auf 0; die über ihnen, in der ersten Reihe stehenden Factoren, $+4$, $+2$, -2 und -3 wären daher die 4 Wurzeln der gegebenen Gleichung. *

*) Anmerk. Der Beweis zu diesem Verfahren findet sich in den Anfangsgründen der Algebra von Lacroix, übersetzt von Metternich §. 197. ff.

Es ist oft der Fall, daß ein Glied der Tabelle durch Addition $= 0$ wird und der über ihm stehende Factor doch keine Wurzel ist, wie dies hier bei -12 und in der 1sten Aufgabe des 155sten §s. mit $+12$ der Fall ist, und doch sollen eigentlich nur die Glieder $= 0$ werden, wo die darüber stehenden Factoren Wurzeln sind.

Dies begründet die Regel: daß, wenn bei der ersten Addition ein Glied $= 0$ wird, nicht mit Sicherheit auf eine Wurzel geschlossen werden kann, besonders wenn zwei oder mehrere, der Zahl nach gleiche Wurzeln vorkommen. Dagegen kann man, wenn bei der zweiten Addition ein Glied $= 0$ wird (wie dies bei der auf diese Art aufgelösten Gleichung $x^4 + 3x^3 - 39x^2 - 47x + 210 = 0$ mit dem Gliede -3 der Fall seyn wird), mit Sicherheit schließen, daß der Factor eine Wurzel der Gleichung ist.

§. 154.

Durch das eben angegebene Verfahren findet man zwar alle rationale Wurzeln einer jeden höheren Gleichung, wenn selbige der Größe nach von einander verschieden sind, aber nicht die gleichen. Käme z. B. die Wurzel $+3$ zweimal als Werth von x vor, so würde man solche durch das eben angegebene Verfahren zwar entdecken, jedoch nur einmal. Erhält man daher bei Beendigung dieses Verfahrens nicht alle Wurzeln, so kann man die noch fehlenden entweder nach §. 151, oder auch dadurch bestimmen, daß man die erhaltenen Wurzeln nach und nach zu x mit dem entgegengesetzten Zeichen setzt, jede dieser Größen zum Quadrat erhebt und hiermit die geordnete Gleichung dividirt; bleibt bei dieser Division kein Rest, so ist dies ein Zeichen, daß die Wurzel, welche man im Divisor gesetzt hatte, zweimal in der Gleichung enthalten ist.

Die zum Theil ganz vollständig ausgeführte Auflösung der folgenden 6 Aufgaben wird dem Anfänger dieses Verfahren versinnlichen.

§. 155.

1ste Aufg. $x^6 + x^5 - 17x^4 - 5x^3 + 64x^2 + 4x - 48 = 0$.

Aufl. Eine vorläufige Untersuchung mit ± 1 zeigt, daß beide Wurzeln der Gleichung sind. Die übrigen Factoren von 48 sind 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 und 48. Man erhielte mittelst folgender Tabelle $+2$, -2, $+3$ und -4, als die noch fehlenden 4 Wurzeln.

	48	+	24	+	16	+	12	+	8	+	6	+	4	+	3	+	2	−	2	−	3	−	4	−	6
: −48	− 1	−	2	−	3	−	4	−	6	−	8	−	12	−	16	−	24	+	24	+	16	+	12	+	8
+(+ 4)	+ 3	+	2	+	1		0	−	2	−	4	−	8	−	12	−	20	+	28	+	20	+	16	+	12
	.		.		.		.		.	−	2	−	4	−	10	−	14		.	−	4	−	2		.
+(+64)										+	62	+	60	+	54	+	50			+	60	+	62		
											.	+	20	+	27	−	25			−	15		.		
+(− 5)												+	15	+	22	−	30			−	20				
												+	5	+	11	+	15			+	5				
+(−17)												−	12	−	6	−	2			−	12				
												−	4	−	3	+	1			+	3				
+(+ 1)												−	3	−	2	+	2			+	4				
												−	1	−	1	−	1			−	1				
+(+ 1)													0		0		0				0				

2te Aufgabe. $2x^5-3x^4+60x = 31x^3+160+2x^2+x^5-3x^4-132x.$

Aufl. Die Gleichung nach §. 146 geordnet, gibt solche unter der Form: $x^5-31x^3-2x^2+192x-160 = 0$. Man erhält durch das eben erläuterte Verfahren $+1$, $+5$, $+2$ und -4 als Wurzeln. Da nun vier Wurzeln bekannt sind, so suche man die fünfte nach §. 151; sie ist nämlich $= -4$, weil $(x^5-21x^3-2x^2+192x-160) : [(x-1)(x-5)(x-2)(x+4)] = x + 4$, also $x = -4$.

3te Aufgabe. $x^4 - 6x^3 - 48x^2 + 208x + 384 = 0$.

Aufl. Man setze, da 384 sehr viele Factoren enthält, $x = 2y$, d. h. man verfahre mit der Gleichung nach §. 148, so erhält man in

x^4	$-6x^3$	$-48x^2$	$+208x$	$+384$
..	..	..	..	..
1	2	4	8	16

$y^4 - 3y^3 - 12y^2 + 26y + 24$ eine Gleichung, deren Wurzeln mit 2 zu multipliciren seyn würden, damit jede derselben $= x$ würde. Die Wurzeln nach der eben angezeigten Methode bestimmt, gibt zwei derselben rational, nämlich eine $= +4$, die andre $= -3$; folglich wäre $x = 8$ und $= -6$.

Man setze, um die übrigen 2 Wurzeln zu bestimmen, $x - 8 = 0$ und $x + 6 = 0$, multiplicire diese beiden Größen und dividire mit diesem Product die gegebene Gleichung, so erhält man in $x^2 - 4x - 8$ einen Quotienten, der, $= 0$ gesetzt, eine verwickelte quadratische Gleichung bildet, die, nach §. 92 reducirt, die 2 fehlenden Wurzeln $= 2 \pm \sqrt{12}$ gibt; die vier Wurzeln wären also hier: 8, -6, 5,4641..., -1,4641...

4te Aufgabe. $20x^4 - 53x^3 - 4x^2 + 16x - 3 = 0$.

Aufl. Wird das erste Glied von seinem Coefficienten befreit, so wird die Gleichung zu

$$x^4 - \frac{53x^3}{20} - \frac{4x^2}{20} + \frac{16x}{20} - \frac{3}{20} = 0.$$

Um die Brüche wegzuschaffen, setze man $x = \frac{y}{20}$, d. h. nach §. 149 verfahren:

x^4	$-\frac{53x^3}{20}$	$-\frac{4x^2}{20}$	$+\frac{16x}{20}$	$-\frac{3}{20}$	$= 0$
×	×	×	×	×	
1	20	20^2	20^3	20^4	

$y^4 - 53y^3 - 80y^2 + 6400y - 24000 = 0$.

Hiervon sind $+5$ und -12 zwei rationale Wurzeln; daher ist $x = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ und $= \frac{-12}{20} = -\frac{3}{5}$. Man setze wiederum $x - \frac{1}{4} = 0$ und $x + \frac{3}{5} = 0$ und verfahre nach voriger Auf-

gabe, so erhält man die zwei übrigen Wurzeln der Gleichung $= \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2{,}61803...$ und $= 0{,}381966...$

5te Aufg. $6x^4+48x^2-22x = 38x^3-2x^4-x^2-3$.

Aufl. Die vier Wurzeln sind $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1 und 3.

6te Aufg. $x^5-\frac{1}{2}x^4-26x^3+22x^2+\frac{131x}{2}-35 = 0$.

Aufl. Die fünf Wurzeln dieser Gleichung sind $\frac{1}{2}$, 2, -5, 4,54138.. und $-1{,}54138...$

Drittes Kapitel.

Auflösung der höhern Gleichungen nach Formeln.

§ 156.

Die Anwendung der Formel des Cardans bei Auflösung der cubischen Gleichungen setzt voraus, daß in der geordneten Gleichung das zweite Glied fehle. Enthält dies daher eine gegebene Gleichung, so muß dasselbe nach §. 149 weggeschafft und die Gleichung auf die allgemeine Form $x^3 = ax+b$ gebracht werden, bei welcher a und b bekannte positive oder negative Größen vorstellen. Dann aber ist $x = \sqrt[3]{\frac{b+\sqrt{(b^2-\frac{4a^3}{27})}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b-\sqrt{(b^2-\frac{4a^3}{27})}}{2}}$ die Formel, mittelst welcher eine Wurzel der cubischen Gleichung erhalten wird; die zwei übrigen findet man nach §. 151. *

Anmerk. Die Anwendung der Formel des Cardans sowohl, als die des Bombelli, gibt in ihren Endresultaten oft einen irrationalen Ausdruck für eine rationale Wurzel; Beispiele davon geben die 3te und 4te Aufgabe. Der Anfänger thut daher wohl, ehe er die Formel anwendet, die zum Auflösen gegebene Gleichung nach vorigem Kapitel auf rationale Wurzeln zu prüfen.

§. 157.

Setzt man die allgemeine Form einer biquadratischen Gleichung (A), $x^4+ax^3+bx^2+cx+d = 0$, in welchen a, b, c und d bekannte positive oder negative Größen vorstellen, und nimmt

an, daß dieser Ausdruck $=$ dem folgenden sey,

(B), $(x^2+\frac{1}{2}ax+g)^2-(hx+k)^2=0$; so käme es nur darauf an, die Werthe der Buchstaben, g, h und k, so zu bestimmen, daß der Ausdruck unter B wirklich $=0$ würde.

Diese Werthe findet man durch folgendes Verfahren. Reducirt man den Ausdruck unter B, so erhält man

$$x^4+ax^3+\tfrac{1}{4}a^2x^2+agx+g^2+2gx^2-2hkx-k^2-h^2x^2$$

Hiervon sind die ersten zwei Glieder $=$ denen von A; das dritte aber $(\frac{1}{4}a^2+2g-h^2)x^2$ müßte $=bx^2$, das vierte $(ag-2hk)x$ müßte $=cx$ und das letzte Glied g^2-k^2 müßte $=d$ seyn, wenn A $=$ B seyn soll. Reducirt man diese Gleichungen, so erhält man

1) aus $(\frac{1}{4}a^2+2g-h^2)x^2=bx^2$ für g den Ausdruck $8g^3-4bg^2+(2ac-8d)g-a^2d+4bd-c^2=0$,

2) aus $(ag-2hk)x=cx$ für h den Ausdruck $h=\sqrt{\frac{1}{4}a^2+2g}-b$, und

3) aus $g^2-k^2=d$ für k den Ausdruck $k=\frac{ag-c}{2h}$

Sind die Werthe von g, h und k bestimmt (was durch Auflösung einer cubischen Gleichung erst bewirkt werden kann), so setze man in dem Ausdruck unter B das zweite Glied $((hx+k)^2)$ auf die rechte Seite des Gleichheitszeichens und ziehe auf beiden Seiten die Wurzel, so erhält man in

(C), $x^2+\frac{1}{2}ax+g=hx+k$ und

(D), $x^2+\frac{1}{2}ax+g=-hx-k$

die Formel des Bombelli, bestehend aus zwei quadratischen Gleichungen, wovon jede zwei Wurzeln der biquadratischen Gleichung unter A als Werthe für x gibt. *

Anm. Der Anfänger sieht, was die Anwendung dieser Formel bei Auflösung der biquadratischen Gleichungen für weitläufige Rechnungen verursacht; deßhalb ist von den in §. 159 folgenden Aufgaben nur die 6te und 7te nach derselben gelöst, alle andre biquadratische aber nach der in folgendem §. angeführten Methode.

§. 158.

Euler gibt in seiner Anleitung zur Algebra folgende Methode an, die Wurzeln einer biquadratischen Gleichung mittelst allgemeiner Formeln zu bestimmen. Man nehme an, die Wurzel einer biquadratischen Gleichung von der Form

$$(A),\ x^4 - 2fx^2 - 8x\sqrt{h} + f^2 - 4g = 0$$

sey $= \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, wo p, q und r die Wurzeln einer cubischen Gleichung von der Form

(B), $y^3 - fy^2 + gy - h = 0$ seyn sollen. Wäre nun die Gleichung (C), $x^4 - ax^2 - bx - c = 0$ gegeben, so wird eine Vergleichung des Ausdrucks unter C mit dem unter A die Werthe der Buchstaben f, g und h also bestimmen:

I) $2f = a$, also $f = \frac{a}{2}$

II) $8\sqrt{h} = b$, also $h = \frac{b^2}{64}$

III) $f^2 - 4g = -c$, oder für f den Werth von I gesetzt, gibt $\frac{a^2}{4} - 4g = -c$ und $g = \frac{a^2+4c}{16}$

Setzt man diese Werthe in die cubische Gleichung unter B, so erhält solche die Form

$$(D),\ y^3 - \frac{ay^2}{2} + \frac{(a^2+4c)y}{16} - \frac{b^2}{64} = 0,$$ und da die Wurzeln derselben $= p, q, r$, eine Wurzel der biquadratischen Gleichung aber $= \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ seyn soll, so erhielte man, da jedes Wurzelzeichen sowohl positiv, als negativ genommen werden kann, eigentlich 8 Werthe für x. Da aber $\sqrt{pqr} = \sqrt{h} = \frac{1}{8}b$ seyn soll, so muß das Product pqr positiv ausfallen, wenn $\frac{1}{8}b$ positiv ist, und negativ, wenn dasselbe negativ ist. Es finden daher jedenfalls nur folgende 4 Wurzeln statt:

I. wenn $\frac{1}{8}b$ positiv ist: 1) $x = \sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$, 2) $x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$, 3) $x = -\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r}$, 4) $x = -\sqrt{p} - \sqrt{q}+\sqrt{r}$.

II. wenn $\frac{1}{3}b$ negativ ist: 1) $x = \sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r}$, 2) $x = \sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r}$, 3) $x = -\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$, 4) $x = -\sqrt{p}-\sqrt{q}-\sqrt{r}$.

Mittelst Anwendung dieser Formeln lassen sich die Wurzeln einer jeden biquadratischen Gleichung bestimmen, wenn man das etwa vorhandene zweite Glied nach §. 149 hinwegschafft, d. h. die Gleichung auf die unter C angegebene Form bringt. Die letzten 4 Aufgaben des folgenden §s. sind nach dieser Methode aufgelöst.

§. 159.

1ste Aufgabe. $x^3 = 12x + 16$.

Aufl. Hier ist $a = 12$ und $b = 16$, folglich ist

$$x = \sqrt[3]{\frac{16 + \sqrt{(16^2 - \frac{4.12^3}{27})}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{16 - \sqrt{(16^2 - \frac{4.12^3}{27})}}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{16 + \sqrt{(256 - \frac{6912}{27})}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{16 - \sqrt{(256 - \frac{6912}{27})}}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{16 + \sqrt{(256 - 256)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{16 - \sqrt{(256 - 256)}}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{8} = 2 + 2 = 4.$$

Die übrigen zwei Wurzeln erhält man: wenn man den Quotienten $x^2 + 4x + 4 = 0$, den man durch Division der Gleichung mit $x - 4$ erhält, nach §. 92 reducirt; sie sind -2 und -2.

2te Aufgabe. $x^3 = 27x + 54$.

Aufl. Um mit kleineren Zahlen zu rechnen, setze man $x = 3y$, so erhält man nach gehöriger Reduction $y^3 = 3y + 2$ und

$$y = \sqrt[3]{\frac{2 + \sqrt{(2^2 - \frac{4.3^3}{27})}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2 - \sqrt{(2^2 - \frac{4.3^3}{27})}}{2}} = 2, \text{ und}$$

also $x = 2 \times 3 = 6$; die übrigen 2 Werthe von $x = -3$ und -3.

3te Aufgabe. $2x^3 = 15x - 581$.

Aufl. Es ist $x^3 = \frac{15x}{2} - \frac{581}{2}$. Da hier $a = \frac{15}{2}$ u. $b = -\frac{581}{2}$, so ist $x = \sqrt[3]{\frac{-581 + \sqrt{337311}}{4}} + \sqrt[3]{\frac{-581 - \sqrt{337311}}{4}}$. Hier scheint es, als wenn für x keine rationale Wurzel statt fände, und doch ist $x = -7$, denn der Cubus von $\frac{-7 + \sqrt{49}}{2} = \frac{-581 + \sqrt{337311}}{4}$

Die übrigen Wurzeln sind $7 + \sqrt{-117}$ und $7 - \sqrt{-117}$, also beide imaginär.

4te Aufgabe. $x^3 = 6x + 40$.

Aufl. Durch Anwendung der Formel erhält man $x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$; also abermals einen irrationalen Ausdruck, und doch ist $x = 4$. Die zwei übrigen Wurzeln aber sind imaginär, nämlich $= -2 \pm \sqrt{-6}$.

5te Aufgabe. $x^3 + 6x^2 - 19x - 84 = 0$.

Aufl. Man entferne das zweite Glied nach §. 149, so erhält man 4, -3 und -7 als Wurzeln für x.

6te Aufgabe. $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$.

Aufl. Hier erhalten die Buchstaben der Bombellischen Formel folgende Werthe: $a = -10$, $b = 35$, $c = -50$ und $d = 24$. Man erhielte also, um g zu bestimmen, die Gleichung $8g^3 - 140g^2 + (1000 - 192)g - 2400 + 3360 - 2500 = 0$, woraus $g = 5$ folgt *); folglich ist

$h = \sqrt{(25+10-35)} = 0$ und

$k = \frac{-50+50}{0} = \frac{0}{0}$ (unbestimmt).

Da hier k unbestimmt bleibt, so reducire man den in §. 157 für

*) Der Anfänger thut wohl, wenn er bei Auflösung der biquadratischen Gleichungen, sowohl nach der Bombellischen als Eulerschen Formel, die darinnen vorkommenden cubischen Gleichungen nach dem zweiten Kapitel dieses Abschnittes zu lösen sucht.

das letzte Glied gefundenen Ausdruck $g^2 - k^2 = d$, hier $25 - k^2 = 24$, woraus $k = 1$ folgt.

Setzt man die für g, h und k gefundenen Werthe in die Formeln (C und D), so erhält man die 2 quadratischen Gleichungen:

1) $x^2 + \left(-\frac{10x}{2}\right) + 5 = 0x + 1$ od. $x^2 - 5x + 5 = 1$

2) $x^2 + \left(-\frac{10x}{2}\right) + 5 = 0x - 1$ od. $x^2 - 5x + 5 = -1$

Aus der Gleichung unter 1 folgt $x = 4$ und $= 1$, und aus der unter 2 folgt $x = 3$ und $= 2$.

7te Aufgabe. $x^4 - 5x^3 - 8x^2 + 32x + 40 = 0$.

Aufl. Hier erhält man $g = -7$, $h = \frac{1}{2}$ und $k = 3$, folglich $x = 5$ und $= -2$ und $x = 1 \pm \sqrt{5}$.

8te Aufgabe. $x^4 - 45x^2 - 40x + 84 = 0$.

Aufl. Bedient man sich zu Auflösung dieser Aufgabe der Eulerschen Formel, so ist hier $a = +45$, $b = 40$ und $c = -84$ *

*) Anm. In dem Ausdruck C des vorigen §s. ist nämlich $-ax^2$; also sollte eigentlich hier stehen $--ax^2$, was begreiflich $= +ax^2$; dasselbe gilt von b und c.

Die zu bildende cubische Gleichung (der Ausdruck D) wäre also hier $y^3 - \frac{45y^2}{2} + \frac{1689y}{16} - 25 = 0$. Verwandelt man diese Gleichung nach §. 148 in $z^3 - 90z^2 + 1689z - 1600 = 0$, bei welcher $z = 4y$; so folgt $z = 64$, 25 und 1, also $y = 16$, $6\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{4}$. Nun aber ist: $\sqrt{p} = \sqrt{16} = 4$, $\sqrt{q} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$ und $\sqrt{r} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$. Und da $b = 40$, folglich $\frac{1}{8}b$ hier positiv ist; so gelten für die 4 Würzeln der gegebenen biquadratischen Gleichung die im vorigen §. unter I. angeführten Werthe; es ist nämlich:

1) $x = 4 + \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 7$,
2) $x = 4 - \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 1$,
3) $x = -4 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = -2$ und
4) $x = -4 - \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = -6$.

9te Aufgabe. $x^4 + x^3 - 20x^2 - 12x + 48 = 0$.

Aufl. Man schaffe nach §. 149 das zweite Glied weg, indem man $x = z - \frac{1}{4}$ setzt, so erhält man: $z^4 - \frac{163}{8} z^2 - \frac{15z}{8} + 4\frac{27}{256} = 0$.

Um die Brüche wegzuschaffen, verfahre man nach §. 149, indem man $z = \frac{u}{4}$ setzet und man erhält $u^4 - 326u^2 - 120u + 12733 = 0$. Hier wäre also $a = 326$, $b = 120$ und $c = -12733$. Der Ausdruck unter D wäre daher hier $y^3 - 163y^2 + 3459y - 225 = 0$, woraus $y = 25 = p$, $y = 69 + \sqrt{4752} = q$ und $y = 69 - \sqrt{4752} = r$ folgt.

Da nun $\frac{1}{8}b$ positiv ist, weil $b = +120$; so folgt

1) $u = \sqrt{25} + \sqrt{(69+\sqrt{4752})} + \sqrt{(69-\sqrt{4752})}$
2) $u = \sqrt{25} - \sqrt{(69+\sqrt{4752})} - \sqrt{(69-\sqrt{4752})}$
3) $u = -\sqrt{25} + \sqrt{(69+\sqrt{4752})} - \sqrt{(69-\sqrt{4752})}$
4) $u = -\sqrt{25} - \sqrt{(69+\sqrt{4752})} + \sqrt{(69-\sqrt{4752})}$.

Es ist aber nach §. 88 die Quadratwurzel aus $69 + \sqrt{4752} = 6 + \sqrt{33}$ und aus $69 - \sqrt{4752} = 6 - \sqrt{33}$; folglich erhält man

1) $u = 5 + (6+\sqrt{33}) + (6-\sqrt{33}) = 17$
2) $u = 5 - (6+\sqrt{33}) - (6-\sqrt{33}) = -17$
3) $u = -5 + (6+\sqrt{33}) - (6-\sqrt{33}) = -5+2\sqrt{33}$
4) $u = -5 - (6+\sqrt{33}) + (6-\sqrt{33}) = -5-2\sqrt{33}$.

Da nun $z = \frac{u}{4}$, so folgt 1) $z = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4}$, 2) $z = -\frac{7}{4} = -1\frac{3}{4}$, 3) $z = \frac{-5+2\sqrt{33}}{4}$, 4) $z = \frac{-5-2\sqrt{33}}{4}$

Und da $x = z - \frac{1}{4}$, so folgt 1) $x = 4\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 4$, 2) $x = -1\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = -2$, 3) $x = \frac{-5+2\sqrt{33}}{4} - \frac{1}{4} = 1{,}37228\ldots$, 4) $x = \frac{-5-2\sqrt{33}}{4} - \frac{1}{4} = -4{,}37228\ldots$

10te Aufgabe. $x^4+8x^3+32x^2+55x+30=0$.

Aufl. Die 4 Wurzeln sind -1, -2, $-2\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-35}$.

11te Aufgabe. $x^4-4x^3-23x^2+6x+56=0$.

Aufl. $x=7$, -2, 1,561553.. und $-2{,}561553..$

12te Aufg. $4x^4+8x^3-1027x^2-1031x+2046=0$.

Aufl. $x=+1$, $=-2$, $=15\frac{1}{2}$ u. $=-16\frac{1}{2}$.

Viertes Kapitel

Auflösung der höheren Gleichungen mittelst des Aufsuchens ihrer incommensurablen Wurzeln, durch Näherung.

§. 160.

Die incommensurablen Wurzeln einer höheren Gleichung durch Näherung bestimmen, heißt soviel, als einen Werth aufsuchen, der, an die Stelle der unbekannten Größe in die geordnete Gleichung gesetzt, die letztern so nahe $=0$ gibt, daß der noch statt habende Fehler für Nichts zu achten ist.

Bevor dieses geschehen kann, muß man erst untersuchen: zwischen welche ganze Zahlen dieser Werth fällt, oder mit andern Worten, man muß erst die Wurzelgränzen bestimmen können. Unter Wurzelgränzen versteht man nämlich zwei, der Größe nach von einander verschiedene Zahlen, die für x in die geordnete höhere Gleichung gesetzt, einmal ein positives und einmal ein negatives Resultat, anstatt Null geben, zwischen welchen Zahlen also die wahre Wurzel liegen muß. Setzt man z. B. in die Gleichung $x^3-3x^2+4x-8=0$, erst $x=2$ und dann $x=3$, so ist: 1) $8-12+8-8=-4$ und 2) $27-27+12-8=+4$; es wären also hier 2 und 3 die Wurzelgränzen.

§. 161.

Erhält man bei allen nur möglichen Substitutionen für x keine Veränderung der Zeichen im Resultate, so zeigt dies an, daß die Gleichung keine mögliche Wurzel zuläßt. Dieser Fall kann

jedoch nur bei einer Gleichung vom 2ten, 4ten, 6ten, ... $2n$ten Grade eintreten. Uibrigens bemerke man in dieser Hinsicht noch:

1) daß jede Gleichung vom 3ten, 5ten, 7 ... $2n+1$ten Grade wenigstens eine reelle Wurzel haben muß; das Zeichen dieser Wurzel ist das entgegengesetzte des letzten Gliedes; —

2) daß jede Gleichung vom 4ten, 6ten ... $2n$ten Grade, deren letztes Glied negativ ist, wenigstens zwei reelle, und zwar eine positive und eine negative Wurzel enthalten muß.

Oft erhält man auch bei der Substitution durch die Resultate Anzeigen, daß zwischen zwei, um eine Einheit verschiedenen Zahlen eine Wurzel vorhanden ist, deren Gränzen kleiner als die Einheit sind. Diese Anzeigen gründen sich auf Folgendes:

1) Wenn man die Zahlen, von 0 an, nach ihrer Ordnungsfolge für x in die Gleichung setzt und es wechseln zwar die Zeichen nicht, wohl aber die Größe der Resultate, so daß letztere einige Zeit fallen, dann aber wieder steigen, so ist zwischen dem Wendepunct des Steigens und Fallens eine Wurzel zu vermuthen.

2) Geben bei diesen Substitutionen zwei auf einander folgende Zahlen gleiche Resultate, so sind zwischen diesen Zahlen 2 gleiche, oder beinahe gleiche Wurzeln zu vermuthen.

3) Erhält man bei der Substitution von 0 ein positives und bei der von 1 ein negatives Resultat, so muß eine Wurzel zwischen 0 und 1 liegen. In solchen Fällen setze man $x = \frac{y}{10}$ (§. 148) und bestimme die Wurzeln dieser transformirten Gleichung dadurch, daß man dieselben zwischen 0 und 10 aufsucht.

§. 162.

Ist eine höhere Gleichung vollkommen und steht geordnet, so lassen sich die Wurzelgränzen nach den folgenden Regeln bestimmen; wäre dieselbe aber nicht vollkommen, so müssen nach §. 149. die fehlenden Glieder hineingeschafft werden.

1) Die positiven Wurzeln einer solchen Gleichung müssen

zwischen 0 und dem um 1 vermehrten größten negativen Coefficienten liegen. Bei der in §. 160 gegebenen Gleichung lägen selbige also zwischen 0 und 4.

2) Die Gränzen der negativen Wurzeln bestimmt man, wenn $-y$ für x in die Gleichung gesetzt, das erste Glied (y^n) aber positiv gemacht wird; die Wurzeln liegen sodann zwischen 0 und dem um 1 vermehrten größten negativen Coefficienten. Die in §. 160 gegebene Gleichung dieser Untersuchung unterworfen, gäbe, wenn $x = -y$, solche $-y^3 - 3y^2 - 4y - 8 = 0$ und $-y^3$ positiv gemacht, gibt $y^3 + 3y^2 + 4y + 8 = 0$, eine Gleichung, in welcher kein negativer Coefficient vorhanden, also ein Beweis, daß die gegebene Gleichung für x keinen negativen Werth zulasse; welches auch schon aus dem Zeichen (§. 147) ersichtlich ist. *)

Anmerk. Der Umwandlung der Gleichung, durch Substitution von $-y$ für x, bedarf es in dem Falle nicht: wenn der höchste Exponent von x ungerade und der höchste negative Coefficient ebenfalls bei einer, mit einem ungeraden Exponenten versehenen Gliede steht; weil in diesem Falle die Gränzen der negativen Wurzeln = denen der positiven sind (s. Aufg. 2).

§. 163.

Die allgemeine Näherungsformel für eine Gleichung vom $n$ten Grade, bei der w als eine Wurzel angenommen worden, die der wahren Wurzel so nahe kommt, daß der Unterschied zwischen w und der letzteren keine Einheit ausmacht, ist $x =$

$$\frac{[(n-1)w^n + (n-2)aw^{n-1} + (n-3)bw^{n-2} \ldots + kw^2 - p]}{[(nw)^{n-1} + (n-1)aw^{n-2} + (n-2)bw^{n-3} \ldots + 2kw + m]} *$$

Anmerk. Der Beweis findet sich in Vegas Vorlesungen über die Mathematik in §. 336.

Mittelst dieser allgemeinen Formel, in welcher die Buchstaben a, b, c, $d \ldots m$ und p die Coefficienten der geordneten Gleichung darstellen, können sehr leicht die besondern Formeln für jede höhere Gleichung von einem bestimmten Grade ($= n$) gefunden werden. Es ist nämlich

1) bei der cubiſchen Gleichung

$$x = \frac{(3-1)w^3+(3-2)aw^2+(3-3)bw-c}{3w^2+(3-1)aw+(3-3)bw^0+(3-3)c}$$

$$= \frac{2w^3+aw^2-c}{3w^2+2aw+b}$$

2) bei der biquadratiſchen Gleichung

$$x = \frac{(4-1)w^4+(4-2)aw^3+(4-3)bw^2+(4-4)cw-d}{4w^3+(4-1)aw^2+(4-2)bw+(4-3)cw^0+(4-4)d}$$

$$= \frac{3w^4+2aw^3+bw^2-d}{4w^3+3aw^2 2bw+c}$$

3) bei der Gleichung vom 5ten Grade

$$x = \frac{4w^5+3aw^4+2bw^3+cw^2-e}{5w^4+4aw^3+3bw^2+2cw+d}$$

Mittelſt dieſer Formeln, und unter ſteter Berückſichtigung der hier gegebenen Erklärungen, wird dem Anfänger die Auflöſung der folgenden 6 Gleichungen nicht ſchwer fallen.

§. 164.

1ſte Aufgabe. $x^3 + 4x - 6 = 0$.

Aufl. Bei cubiſchen Gleichungen, in welchen das 2te Glied fehlt, können die Wurzelgränzen noch genauer beſtimmt werden als mittelſt der in §. 162 gegebenen Regeln. Es laſſen ſich nämlich die möglichen Formen, unter denen die Gleichung erſcheinen kann, auf folgende vier zurückbringen:

1) $x^3+ax+b=0$, 2) $x^3+ax-b=0$, 3) $x^3-ax+b=0$ und 4) $x^3-ax-b=0$. Bezeichnete nun W die größere und w die kleinere Wurzel, ſo iſt:

a) beim erſten Falle $w = \frac{-b}{8+\sqrt[3]{b^2}}$ u. $W = \sqrt[3]{-b}$,

b) beim zweiten Falle $w = \frac{b}{8+\sqrt[3]{b^2}}$ und $W = \sqrt[3]{b}$,

c) beim dritten Falle $w = \frac{b}{a}$ und $W = \sqrt{a}$,

d) beim vierten Fall aber ist $w = \sqrt{a}$ und $W = \sqrt{a+b}$. Da die gegebene Gleichung unter der 2ten Form erscheint, so ist hier w

$= \frac{6}{8+\sqrt[3]{36}} = 0{,}5308\ldots$ und $W = \sqrt[3]{6} = 1{,}817\ldots.$

Man setze nun in der Näherungsformel $w = 0{,}53$; so erhält man, da hier $a = 0$, $b = 4$ und $c = -6$, $x = \frac{2\times 0{,}53^3-(-6)}{3\times 0{,}53^2+4} = \frac{0{,}297754+6}{0{,}8427+4} = 1{,}3005\ldots$ Diesen Werth abermals für w in die Formel gesetzt, gibt $x = \frac{2\times 1{,}3005^3+6}{3\times 1{,}3005^2+4} = 1{,}146..$ Diesen Werth nochmals für w in die Formel gesetzt, gäbe $x = \frac{2\times 1{,}146^3+6}{3\times 1{,}146^2+4} = 1{,}1347\ldots$

Angenommen, dieser letztere Werrh wäre genau genug entwikkelt, so würde, wenn selbiger für x in die gegebene Gleichung gesetzt würde, solche zu $1{,}460976.. + 4{,}53912.. - 6 = -0{,}00009\ldots$ Die übrigen 2 Wurzeln sind imaginär, wovon sich der Anfänger überzeugen kann, wenn er die Gleichung mit $x - 1{,}1347..$ dividirt (§. 151), den gefundenen Quotienten $= 0$ setzt und nach §. 92 reducirt.

2te Aufgabe. $x^3 - 3x^2 + 4x - 8 = 0$.

Aufl. Da in der gegebenen Gleichung drei Abwechselungen der Zeichen vorkommen, so sind alle drei Wurzeln positiv, und da 3 der höchste negative Coefficient, so müssen diese Wurzeln zwischen 0 und 4 liegen. Setzt man für x nach und nach die folgenden Werthe, so erhält man, wenn $x = 0$, für den 2ten Theil -8

=	$x = 1$	=	-6
=	$x = 2$	=	-4
=	$x = 3$	=	$+4$
=	$x = 4$	=	$+24$

Es muß also eine Wurzel zwischen 2 und 3 liegen. Man setze daher in der Näherungsformel $w = 2{,}5$, so wird $x = \frac{2\times 2{,}5^3-3\times 2{,}5^2+8}{3\times 2{,}5^2-6\times 2{,}5+4} = 3\frac{2}{11}$; dieses nochmals $= w$ gesetzt,

gibt $x = \frac{17593}{67911}$. Verwandelt man diesen Bruch nach §. 18. in einen Näherungsbruch, so wird solcher zu $\frac{1362}{517}$, und diesen letzteren nochmals $= w$ gesetzt, gibt $x = \frac{2\times(\frac{1362}{517})^3 - 3\times(\frac{1362}{517})^2 + 8}{3\times(\frac{1362}{517})^2 - 6\times(\frac{1362}{517}) + 4}$

$= \frac{820368479}{311410297}$, fast $= \frac{2637}{1001}$.

Setzt man diese gefundenen Werthe nach und nach für x in die gegebene Gleichung, so wird der zweite Theil derselben,

1) wenn $x = \frac{82}{31}$, folgt $\frac{12916}{29791} = 0{,}098\ldots$ statt 0;
2) = $x = \frac{1362}{517}$, = $\frac{79852}{138188413} = 0{,}00057\ldots$ = 0 u.
3) = $x = \frac{2637}{1001}$, = $\frac{3086}{1003003001} = 0{,}00000307$ = 0.

Die Gleichung durch $x - 2{,}63\ldots$ dividirt, gibt $x^2 - 0{,}37x + 3{,}0269$ zum Quotienten, dessen Reduction die 2 übrigen Wurzeln als imaginär anzeigt.

3te Aufgabe. $x^3 - 7x + 7 = 0$.

Aufl. Die Wurzelgränzen dieser Gleichung nach dem 3ten Fall der bei der ersten Aufgabe angegebenen Formen bestimmt, gibt solche: $x < \sqrt{7}$ und $>$ als $\frac{7}{7}$; eine Wurzel muß also zwischen 1 und 2,64575.. liegen. Um auch die Gränzen der übrigen Wurzeln zu bestimmen, setze man $x = y + 1$, so erhält man in $y^3 + 3y^2 - 4y + 1 = 0$ eine Gleichung, deren höchster negativer Coefficient -4; es muß also eine negative Wurzel zwischen 0 und 5 fallen. Man findet: daß -4 für y in die Gleichung gesetzt $+1$, und -5 für y in die Gleichung gesetzt -29 gibt; also liegt die negative Wurzel zwischen -4 und -5. Setzt man ferner $y = +1$, so folgt $+1$ zum Resultat statt 0, und setzt man $y = +2$, so folgt wiederum $+1$; es sind also zwischen 1 und 2 zwei ziemlich gleiche Wurzeln zu vermuthen. Man setze deßhalb $x = \frac{z}{10}$, so erhält man $z^3 - 700z + 7000$.

Nun substituire man die Zahlen zwischen 10×1 und $10\times(1+1) = 20$ und man wird finden: daß die Zeichen der Resultate einmal bei 13 und 14 und einmal bei 16 und 17 wechseln.

Die eine positive Wurzel von x wird also zwischen 1,3 und 1,4, die andre zwischen 1,6 und 1,7, die negative Wurzel aber zwischen -3 und -4 liegen $\left(\text{weil } x = y+1 \text{ und } y = \begin{cases} -4 \\ -5 \end{cases}\right)$. Wendet man zur nähern Bestimmung der Wurzeln die gegebenen Formeln an, so erhält man $x = \frac{12694873}{9355820}$, fast $= \frac{384}{283}$; $x = \frac{35652913}{21069025}$, fast $= \frac{1149}{679}$, und $x = -\frac{1019}{334}$, fast $= -3{,}0511..$ *)

Anmerk. Zur Vermeidung von Mißverständnissen bemerke ich, daß ich mich bei Auflösung dieser und der folgenden Aufgaben der Näherungsbrüche bedient habe. So folgte z. B. hier nach der ersten Correction $x = \frac{8317}{6130}$, wenn $w = 1{,}35$ gesetzt ward; für diesen größeren Bruch ward bei der 2ten Correction der fast gleiche $\frac{251}{185}$ für w gesetzt.

4te Aufgabe. $x^4 - 5x^3 - 4x + 64 = 0$.

Aufl. Setzt man $x = y + 1$, so erhält man in $y^4 - y^3 - 9y^2 - 15y + 56 = 0$ eine Gleichung, die 2 positive und 2 negative Wurzeln enthält. Die positiven müssen zwischen 0 und $15 + 1$ liegen, und die Substitution zeigt, daß eine zwischen 1 und 2, die andre zwischen 3 und 4 liegt; die Wurzeln für x lägen also zwischen 2 und 3 und zwischen 4 und 5. Um auch die negativen Wurzeln zu bestimmen, setze man $y = -v$, so erhält man $v^4 + v^3 - 9v^2 + 15v + 56 = 0$; sie müßten also zwischen 0 und -10 liegen. Die Substitution gibt jedoch keine Veränderung der Resultate, daher müssen die negativen Wurzeln imaginär seyn; dies folgt aber auch schon aus der Betrachtung der oben gegebenen Gleichung, denn setzt man jede nur denkbare negative Zahl $-p$ für x, so wird dennoch die Gleichung aus lauter positiven Gliedern bestehen, die also nie $= 0$ werden können. Setzt man, um die 2 positiven Wurzeln näher zu bestimmen, die eine $= 2{,}5$, die andre $= 4{,}5$, und die erhaltenen Werthe nochmals $= w$, so folgt endlich $x = \frac{1167413664 53}{4327036 1248} = 2{,}6979...$ und

$x = \frac{2255940337795 87}{4883537654435 2} = 4{,}6194...$

5te Aufgabe. $x^4 - 60x^2 + 621x - 864 = 0$.

Aufl. Eine positive Wurzel ist $= 1{,}405\ldots$, die übrigen 2 positiven Wurzeln sind imaginär, und die negative Wurzel liegt zwischen -11 und -12.

6te Aufgabe. $x^5 - 3x^2 + 7x - 80 = 0$.

Aufl. Hier ist eine Wurzel $= 2{,}41179..$ Die Aufsuchung der übrigen bleibt dem Fleiße des Anfängers überlassen.

Fünftes Kapitel.

Auflösung der höheren Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen.

§. 165.

Bei Auflösung der höheren Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen wird man in vielen Fällen durch eine der, im dritten Kapitel des vierten Abschnittes angegebenen Eliminationsmethoden zum Ziele gelangen; für Gleichungen aber, wo dies nicht der Fall wäre, gilt folgendes Verfahren, die unbekannten Größen bis auf eine auszuscheiden.

Man suche nämlich nach §. 38. zwischen je zwei der gegebenen und vorher auf 0 gebrachten Gleichungen den größten gemeinschaftlichen Theiler. Findet sich ein solcher, so dividire man beide Gleichungen durch denselben und man wird, wenn ein Glied dieses Theilers aus einer unbekannten Größe besteht, zwei Gleichungen von einem niederen Grade erhalten. Bei diesen suche man wiederum den gemeinschaftlichen Theiler, indem man die Division nach §. 38 so lange fortsetzt, bis die unbekannte Größe, nach welcher man ordnete, nicht mehr in dem Reste erscheint. Damit nun dieses letztere um desto schneller geschehe, ordne man nach der unbekannten Größe, die in den beiden Gleichungen in der niedrigsten Potenz stehend vorkommt. Da der erhaltene Rest $= 0$, so bestimme man, mittelst der früher gegebenen Regeln, den Werth der bei ihm vorkommenden unbekannten Größe auf die gewöhnliche Weise.

§. 166.

1ste Aufgabe. 1) $x + y + z = -9$, 2) $xy + xz + yz = 26$, 3) $xyz = -24$.

Aufl. Man erhält die 1ste Gleichung $x(y+z) + y^2 + 2yz + z^2 = -9y - 9z$ (durch $\times$ mit $y+z$), die 2te Gleichung $xyz + y^2z + z^2y = -9yz$ (durch $\times$ mit yz). Zieht man nun einmal die zweite und einmal die dritte von der multiplicirten ersten Gleichung ab, so erhält man in (A) $y^2z + z^2y = 24 - 9yz$ und (B) $y^2 + yz + z^2 = -26 - 9y - 9z$ zwei Gleichungen, in welchen kein x mehr vorhanden. Multiplicirt man ferner die Gleichung B mit z und subtrahirt von selbiger die Gleichung unter A, so erhält man in $z^3 = -9z^2 - 26z - 24$ oder $z^3 + 9z^2 + 26z + 24 = 0$ eine cubische Gleichung mit einer unbekannten Größe.

Durch Auflösung derselben nach dem zweiten Kapitel dieses Abschnittes folgt $z = -2, -3$ und -4. Setzt man $z = -4$ in die Gleichung unter A, so folgt solche als $-4y^2 + 16y = 24 + 36y$ und $y = -3$ und $= -2$. Setzt man $z = -4$ und $y = -3$ in die 1ste der gegebenen Gleichungen, so erhält man $x = -2$. Die Wurzeln der cubischen Gleichung zeigten also zugleich die Werthe von x und y mit an, welches auch deßhalb statt finden mußte: weil z in der Gleichung der Bedingnisse nur in der ersten Potenz stehend, aber mit x und y multiplicirt vorkommt.

2te Aufgabe. 1ste Gleichung $x^3 + x^2y - 3x^2 - 7xy - 18x + 10y + 40 = 0$; 2te Gleichung $y^3 + xy^2 + 5y^2 - y - x - 5 = 0$.

Aufl. Man bringe, um x zu eliminiren, beide Gleichungen auf folgende Formen: (A) $x^3 + x^2(y-3) + x(-7y-18) + 10y + 40 = 0$, (B) $x(y^2-1) + y^3 + 5y^2 - y - 5 = 0$.

Nun dividire man die Gleichung unter A durch die unter B und mit dem bei dieser Division bleibenden Rest dividire man wie-

berum die Gleichung unter B, so wird man bei dieser Division einen Rest $= -y^2 - 17y - 70$ erhalten, in welchen kein x mehr vorkommt. Diesen $= 0$ gesetzt und nach §. 92 reducirt, gibt $y = -7$ und $= -10$. Beide Werthe nach einander in die Gleichung unter B gesetzt, gibt, wenn $y = -7$, für $x = 2$ und wenn $y = -10$, für $x = 5$. Die übrigen Werthe für x erhält man, wenn man einen Werth für y in die Gleichung A setzt, die Gleichung sodann durch $(x-2)(x-5)$ dividirt, und den erhaltenen Quotienten reducirt (§. 151). Setzt man nun $y = -7$, so wird $x = 3$; setzt man aber $y = -10$, so wird $x = 6$.

3te Aufgabe. 1ste Gleichung $2x^3 + 3x^2y - 2xy - 3y^2 = 118x^2 - 236y$; 2te Gleichung $5x^4 - 7x^2y^2 - 4333x^2 - 5x^2y + 7y^3 + 4333y = 0$.

Aufl. $x = 35$ und $= -229\frac{6}{17}$; $y = 16$ und $= 192\frac{4}{17}$.

4te Aufgabe. 1ste Gleichung $x^4 - 2yx^2 + 4y^2 - x - 94 = 0$; 2te Gleichung $y^3 - 3y^2x^2 - yx^3 + x^4 + 334 = 0$.

Aufl. Die vorzunehmende Division führt auf eine Gleichung vom 10ten Grade, die unter andern einen Werth für $x = -3$ gibt; setzt man denselben in die erste der gegebenen Gleichungen, so erhält man $y = \frac{9}{4} \pm \sqrt{\frac{121}{16}} = \frac{9}{4} \pm \frac{11}{4} = 5$ und $= -\frac{1}{2}$. Daß außerdem für x und y noch mehrere Werthe statt finden, erwähne ich nur beiläufig; die Aufsuchung derselben aber ist für den Anfänger eine gute Uebung im algebraischen Calcul.

Sechstes Kapitel.

Algebraische Aufgaben, die auf höhere Gleichungen führen.

§. 167.

1ste Aufgabe. Die Hälfte der Ackerzahl eines Reviers mit dem dritten und fünften Theil der Ackerzahl multiplicirt, von dem Producte aber 5 Nullen abgeschnitten (oder dasselbe mit 100000 di-

vidirt) gibt gerade das Quadrat von 24; wieviel Acker hat dieses Revier?

Aufl. Die Ackerzahl $= x$ gesetzt, gibt $\frac{x}{2} \times \frac{x}{3} \times \frac{x}{5}$: $100000 = 24^2$ und $x = \sqrt[3]{1728000000} = 1200$ Acker.

2te Aufgabe. Ein Graben um ein Gehege soll noch einmal so breit als tief und 48 mal so lang als breit seyn; man bezahlte für die Cubikelle aufzuwerfen 2 gr., im Ganzen aber 31 Thlr. 6 gr.; wie tief, breit und lang war dieser Graben?

Antw. $x = \sqrt[3]{\frac{125}{64}} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$ Elle Tiefe, $1\frac{1}{4} \times 2 = 2\frac{1}{2}$ Elle Breite, und $2\frac{1}{2} \times 48 = 120$ Ellen Länge hatte der Graben.

3te Aufgabe. Auf jedem Acker eines Gehaues standen 12 mal soviel Klaftern als der Gehau Acker enthielt, und da jede Klftr. gerade für ein halb mal soviel Thlr. verkauft ward, als diese Ackerzahl besagt, die Kaufsumme für sämmtliche Klftrn. aber 750 Thlr. ausmachte, so fragt es sich: wie groß der Gehau war und wieviel Klaftern im Ganzen auf selbigem standen.

Antw. $x = \sqrt[3]{125} = 5$ Acker; es standen daher $5 \times 12 \times 5 = 300$ Klafter auf dem Gehau.

4te Aufgabe. Multipilicire ich den Cubus einer Zahl mit dem vierten Theil derselben, und ziehe von dem herauskommenden Producte 0,25 ab, so ist der Rest $= 600$; diese Zahl ist?

Antw. 7.

5te Aufgabe. Um einen Entwässerungsgraben durch einen Sumpf zu ziehen, schloß man mit den dazu bestimmten Arbeitern folgenden Vertrag ab. Der Graben solle 3 mal so breit und 20 mal so lang seyn als er tief ist; für jede Cubikelle desselben aber sollen soviel Pfennige bezahlt werden, als der zehnte Theil Cubikellen des Grabens an Pfennigen ausmache. Nach beendigter Arbeit mußte man gerade 80 Thlr. bezahlen; wie lang, breit und tief war dieser Graben, und was bezahlte man für die Cubikelle?

Antw. Der Graben war 2 Ellen tief, 6 Ellen breit und 40 Ellen lang, enthielt also $40 \times 6 \times 2 = 480$ Cubikellen, die Cubikelle aufzuwerfen kostete daher $\frac{480}{10} = 48$ pf. $= 4$ gr.

6te Aufgabe. Man suche 3 Zahlen, die folgende Eigenschaften haben. Multiplicirt man das Quadrat der ersten Zahl mit der zweiten, so erhält man $245 = a$; multiplicirt man das Quadrat der zweiten Zahl mit der dritten, so erhält man $75 = b$, multiplicirt man endlich das Quadrat der dritten Zahl mit der ersten, so erhält man $63 = c$; diese Zahlen sind?

Antw.

$x = \sqrt[9]{\frac{a^4 c}{b^2}}$ hier $= 7$, $y = \sqrt[9]{\frac{ab^4}{c^2}}$ hier $= 5$, $z = \sqrt[9]{\frac{c^4 b}{a^2}}$ hier $= 3$

7te Aufgabe. Der Unterschied zweier Zahlen ist 3, multiplicirt man das Product dieser beiden Zahlen mit ihrer Summe, so erhält man 308; diese Zahlen sind?

Antw. Die kleinere Zahl $x = 4$ und die größere Zahl $x + 3 = 7$.

8te Aufgabe. Auf einem Reviere sind gerade 5 mal soviel Acker Buchen und 7 mal soviel Acker Fichten als Eichen vorhanden; der Acker Buchen enthält im Durchschnitt 4200 Cbkfß. mehr, der Acker Fichten 3420 Cbkfß. mehr und der Acker Eichen 5760 Cbkfß. mehr als das Quadtat der Ackerzahl der Eichen ausmacht; die Summe aller Cbkfß. aber ist 5850000; wie groß ist dieses Revier? wieviel Acker waren mit Buchen, wieviel mit Fichten und wieviel mit Eichen bestanden? und wieviel Cbkfß. waren von jeder Holzsorte vorhanden?

Aufl. Die Anzahl der mit Eichen bestandenen Acker $= x$, also deren Quadrat $= x^2$, also die mit Buchen bestandenen Acker $= 5x$ und die mit Fichten bestandenen $= 7x$, die Anzahl aller Acker aber $= x + 5x + 7x = 13x$. Nun hat

1 Acker Buchen $4200 + x^2$
1 " Fichten $3420 + x^2$
1 " Eichen $5760 + x^2$

} Cbkfß., folglich sind vorhanden:

$(4200+x^2)5x = 21000x + 5x^3$ Cubikfuß Buchen
$(3420+x^2)7x = 23940x + 7x^3$ " Eichen
$(5760+x^2)x = 5760x + x^3$ " Fichten
im Ganzen $50700x + 13x^3$ Cubikfuß.

Nun ist: $50700x + 13x^3 = 5850000$ und $x = 60$.
Es waren also $x = 60$ Ack. Eichen, welche 561600 Cbkfß. Eichen
$5x = 300$ " Buchen, " 2340000 " Buchen
$7x = 420$ " Fichten, " 2948400 " Fichten
geben. Die Größe des ganzen Reviers aber wäre $= 780$ Acker.

9te Aufgabe. Auf einem Gehau standen 29 Klftrn. hartes und weiches Scheitholz. Der Preis einer Klftr. harten Holzes beträgt an Thlrn. gerade soviel als der vierte Theil der vorhandenen harten Klftrn., und der Preis einer weichen Klftr. beträgt an Thlrn. soviel als der dritte Theil der weichen Klftr. besagt; multiplicire ich das aus den weichen Klftrn. gelöste Geldquantum mit der Zahl der harten Klftrn., so erhalte ich gerade 360 Thlr. weniger, als wenn ich das, durch den Verkauf der harten Klftrn. erhaltene Geld mit der Anzahl der weichen Klftrn multiplicire; wieviel Klftrn. standen von jeder Sorte auf dem Gehau?

Aufl. Sind es x weiche Klftrn. so sind es $29 - x$ harte, der Preis einer weichen Klftr. ist $= \frac{x}{3}$, der einer harten $= \frac{29-x}{4}$ die weichen Klftrn. kosten demnach $x \times \frac{x}{3} = \frac{x^2}{3}$ und die harten kosten $(29-x)\left(\frac{29-x}{4}\right) = x^2 - \frac{145x}{4} + \frac{841}{4}$. Nun aber ist den Bedingungen zufolge: $\frac{x^2}{3} \times (29-x) + 360 =$
$\left(\frac{x^2}{4} - \frac{29x}{2} + \frac{841}{4}\right) x$ und $x = 9$ weichen, und $29 - 9 =$ 20 harten Klaftern.

10te Aufgabe. Von zwei Eichenpflanzungen ist die eine 5 Jahr jünger als die andere, multiplicirt man aber das Product der Jahre ihres beiderseitigen Alters mit der Summe dieser Jahre, so ist das herauskommende Product gerade 102 mal größer als die

Altersszahl der älteren Pflanzung; wie alt ist jede dieser Pflanzungen?

Antw. Die jüngere 6, die ältere 11 Jahr.

11te Aufgabe. Von einem mit Wein gefüllten Faß werden 4 Maß abgezapft und 4 Maß Wasser wieder dazu gegossen. Von diesem Gemisch werden abermals 4 Maß abgezapft und aufs Neue 4 Maß Wasser dazu gegossen; von diesem Gemisch werden zum drittenmale 4 Maß abgezapft und dafür 4 Maß Wasser eingegossen, und nun findet sich, daß im Fasse gerade $2\frac{1}{2}$ Maß mehr Wasser als Wein ist; wieviel Maß Wein waren anfänglich im Fasse? und wieviel Maß Wein sind nach dem 1sten, 2ten und 3ten Abzapfen noch darinnen?

Aufl. Im Fasse sollen x Maß Wein seyn, so sind nach dem ersten Abzapfen $x - 4$ Maß Wein darinnen, in jedem einzelnen Maß aber ist $\frac{x-4}{x}$ Wein; nach dem 2ten Abzapfen $x-4-4\left(\frac{x-4}{x}\right) = \frac{x^2-8x+16}{x}$ (a) Maß Wein darinnen, in jedem einzelnen Maß aber ist $\frac{x^2-8x+16}{x^2}$ Wein, und nach dem dritten Abzapfen $\frac{x^2-8x+16}{x} - 4\left(\frac{x^2-8x+16}{x^2}\right) = \frac{x^3-12x^2+48x-64}{x^2}$ (b) Maß Wein im Fasse. Ferner sind nach dem erstenmal Abzapfen 4 Maß Wasser im Fasse; in jedem einzelnen Maße aber ist $\frac{4}{x}$ Wasser; beim zweitenmal wird mit abgezapft $\frac{4}{x} \times 4 = \frac{16}{x}$ Wasser, es bleiben also $4 - \frac{16}{x}$ Wasser im Fasse; nachgeschüttet aber werden 4 Maß, also sind nach dem zweitenmal Abzapfen $4 + 4 - \frac{16}{x} = \frac{8x-16}{x}$ Maß Wasser im Fasse (c); in jedem einzelnen Maße aber sind $\frac{8x-16}{x^2}$; davon

werden beim drittenmale mit abgezapft $4 \times \frac{8x-16}{x^2} = \frac{32x-64}{x^2}$ Maß Wasser; es bleiben also noch $\frac{8x-16}{x} - \left(\frac{32x-64}{x^2}\right)$ $= \frac{8x^2-48x+64}{x^2}$ Maß Wasser im Fasse, und da wieder 4 Maß zugeschüttet werden, so sind $4 + \frac{8x-48x+64}{x^2} = \frac{12x^2-48x+64}{x^2}$ (*d*) Maß Wasser im Fasse. Nun aber ist, den Bedingungen zufolge, $2\frac{1}{2}$ Maß Wasser mehr im Fasse als Wein, folglich ist $\frac{x^3-12x^2+48x-64}{x^2} + 2\frac{1}{2} = \frac{12x^2-48x+64}{x^2}$, woraus $x = 16$. Es sind also nach dem erstenmal Zapfen 12 Maß Wein und 4 Maß Wasser; nach dem zweitenmal Zapfen 9 Maß Wein und 7 Maß Wasser (Gleichung *a* und *c*), und nach dem drittenmal Zapfen $6\frac{3}{4}$ Maß Wein und $9\frac{1}{4}$ Maß Wasser im Fasse; (Gleichung *b* und *d*).

12te Aufgabe. Ein Forstbedienter gab den Ertrag seines Reviers also an: im Jahre 1813 brachte es 180 Thlr. weniger ein als im Jahre 1812; im Jahre 1814 hingegen mußte es gerade ein doppelt so großes Quantum als im Jahre 1812 liefern; multiplicire ich diese 3 Größen mit einander und dividire das herauskommende Product mit 10000, so verhält sich dieser Quotient, zu der Summe der 3 Jahreserträge wie 1152 zu 145; wieviel rentirte dieses Revier in jedem der angegebenen Jahre?

Antw. Im Jahre 1812 rentirte es 480 Thlr.
" " 1813 " " 300 "
" " 1814 " " 960 "

13te Aufgabe. Zur Cultur einer bedeutenden Blöße nahm ein Forstbedienter einige Arbeiter, von denen jeder gerade soviel Groschen bekam als Arbeiter waren; sie brachten aber über die Cultur dieser Blöße soviel Tage weniger einen zu, als die sämmtlichen Arbeiter täglich Groschen bekamen; nach beendigter Arbeit fand sich, daß der Forstbediente gerade 270 Thlr. verwendet hatte;

wieviel Arbeiter hatte er dazu, und wie lange haben selbige darüber zugebracht?

Aufl. Die Anzahl der Arbeiter $= x$, sie erhielten also täglich x^2 Groschen, und da sie im Ganzen $x^2 - 1$ Tag gearbeitet haben, so müssen sie $x^2 \times (x^2-1) = x^4 - x^2$ Groschen erhalten haben; da nun 270 Thlr. $=$ 6480 gr., so ist: $x^4 - x^2 = 6480$, woraus $x = 9$ und die Anzahl der Arbeitstage $= 80$ folgt.

14te Aufgabe. Ein Saamenhändler hatte eine Quantität Fichten- und Lerchensaamen. Verkauft er das Pfund der ersten Sorte um soviel Groschen, als er von der zweiten Sorte Pfunde hat, und das Pfund der zweiten Sorte um soviel Groschen, als er von der ersten Pfunde hat, so löst er im ganzen 48 Thlr.; verkauft er dagegen bei jeder Sorte das Pfund um soviel Groschen, als er von derselben Pfunde hat, so löst er 64 Thlr. 16 gr.; wieviel Pfunde hatte er von jeder Sorte?

Aufl. Er soll x Pfd. Fichten- und y Pfd. Lerchensaamen haben, so ist:

1) $xy + yx = 48 \times 24$ oder $2xy = 1152$.

2) $x^2 + y^2 = 64\frac{2}{3} \times 24$ oder $x^2 + y^2 = 1552$.

Hieraus folgt: $y = 36$ und $= 16$ und $x = \frac{567}{36} = 16$ und $x = \frac{576}{16} = 36$.

Der Saamenhändler kann also 36 Pfd. Lerchen- und 16 Pfd. Fichtensaamen, oder 16 Pfd. Lerchen- und 36 Pfd. Fichtensaamen gehabt haben.

15te Aufgabe. Vier Personen hatten eine gewisse Summe bei sich, und zwar hatte B 1 Thlr. mehr als A, C 1 Thlr. mehr als B, und D 1 Thlr. mehr als C; multiplicirt man diese 3 Summen mit einander, so erhält man gerade soviel Thaler, als die Summe des C mit der des A multiplicirt in Groschen ausmacht; wieviel Thaler hatte jeder bei sich?

Antw. A hatte 3 Thlr., B 4 Thlr., C 5 Thlr. und D 6 Thlr. bei sich.

16te Aufgabe. Ein Wasserbehälter wird durch 4 Röhren in $1\frac{29}{601} = \frac{630}{601}$ Stunden gefüllt; soll derselbe aber gefüllt werden, wenn jede Röhre allein läuft, so erfordert die zweite 3, die dritte 5 und die vierte 7 Stunden mehr Zeit, als die erste; wieviel Stunden sind bei jeder Röhre zur Füllung erforderlich?

Aufl. Wird er durch die erste Röhre in x Stunden gefüllt, so erfordert die zweite $x+3$, die dritte $x+5$ und die vierte $x+7$ Stunden; die erste Röhre aber füllt in einer Stunde den $\frac{1}{x}$, die zweite den $\frac{1}{x+3}$, die dritte den $\frac{1}{x+5}$ und die vierte den $\frac{1}{x+7}$ Theil des Gefäßes; alle vier zusammen aber füllen in einer Stunde $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+7}$. Nun aber wird der Behälter durch alle Röhren in $\frac{630}{601}$ Stunden gefüllt, folglich füllen dieselben in einer Stunde den $1 : \frac{630}{601} = \frac{601}{630}$ Theil des Gefäßes, daher ist $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+7} = \frac{601}{630}$ und $x = 2$. Die erste Röhre braucht also 2, die zweite 5, die dritte 7 und die vierte 9 Stunden Zeit, um den Behälter zu füllen.

17te Aufgabe. Die Summe von 3 Zahlen ist $9 = a$; die Summe der Producte von je zwei dieser Zahlen ist $23 = b$, das Product dieser drei Zahlen ist $15 = c$; diese Zahlen sind?

Antw. Werden die 3 Zahlen durch x, y, z dargestellt, so ist: 1) $x+y+z=a$, 2) $xy+xz+yz=b$, 3) $xyz=c$. Hieraus folgt: 1, 3 und 5 als die gesuchten 3 Zahlen (vergl. Aufgabe 1 des §s. 166).

18te Aufgabe. Die Summe von vier Zahlen ist $2 = a$. Die Summe der Producte von je zwei dieser Zahlen ist $-37 = b$, die Summe der Producte von je drei dieser Zahlen ist $10 = c$ und das Product aller 4 Zahlen ist $168 = d$; diese Zahlen sind:

Aufl. Die Zahlen mögen v, x, y und z seyn, so ist: 1) $v+x+y+z=a$. 2) $vx+vy+vz+xy+xz+yz=b$. 3) $vxy+vxz+vyz+xyz=c$. 4) $vxyz=d$.

Die erste dieser Gleichungen mit v multiplicirt und davon die zweite abgezogen, gibt: 5) $v^2 - xy - xz - yz = av - b$. Diese nochmals mit v multiplicirt und hierzu die dritte Gleichung addirt, gibt: 6) $v^3 + xyz = av^2 - bv + c$. Diese Gleichung nochmals mit v multiplicirt und davon die vierte abgezogen, gibt: 7) $v^4 = av^3 - bv^2 + cv - d$ und $v^4 - av^3 + bv^2 - cv + d = 0$ oder $v^4 - 2v^3 - 37v^2 - 10v + 168 = 0$, deren 4 Wurzeln $= 2, -3, -4$ und $+7$ zugleich die gesuchten 4 Zahlen sind.

Da die Coefficienten der unbekannten Größe einer jeden vollkommenen, verwickelten, geordneten und auf Null gebrachten cubischen Gleichung in denselben Verhältnissen zu einander stehen, wie die drei Größen a, b und c der 17ten Aufgabe, und die Coefficienten einer biquadratischen Gleichung wie die vier Größen a, b, c und d der 18ten Aufgabe, so daß die biquadratische für die 18te Aufgabe: $w^4 + 2w^3 - 37w^2 + 10w + 168 = 0$; so können die Wurzeln einer solchen Gleichung unmittelbar aus ihren Coefficienten bestimmt werden, wenn man nämlich, nach den früheren Erläuterungen, soviel Gleichungen bildet, als der höchste Exponent der gegebenen höheren Gleichung Einheiten hat; bei der cubischen also 3, wie in der 17ten; bei der biquadratischen 4, wie in der 18ten Aufgabe.

19te Aufgabe. Von einem Reviere werden jährlich 80 Klfn. eichene und kieferne Scheite zu einem gewissen Preiße abgegeben, und zwar verhält sich der Preiß einer eichenen Klfr. zu dem einer kiefernen, wie sich die Summe der abgegebenen kiefernen Klfr. zu der der eichenen verhält, der Preiß der eichenen Klfrn. beträgt aber gerade so vielmal 2 Groschen, als kieferne Klfrn. sind; multiplicirt man jedoch die Zahl der eichenen Klfrn. mit der der kiefernen und dieses Product sowohl mit dem Preiße der kiefernen, als mit dem der eichenen Klfrn., so erhält man gerade 10000 Thlr; wieviel Klfrn. werden von jeder Sorte abgegeben und was kostete jede Klafter?

Antw. 60 kieferne und 20 eichene Scheitklaftern sind abgegeben worden, und zwar die kieferne zu $1\frac{1}{3}$ Thlr.; die eichene zu 5 Thlr. —

20ste Aufgabe. Ich erhielt im 24sten Jahre meines Alters den Dienst, erwiederte ein, nach der Größe seines Reviers befragter Förster, — multiplicire ich meine Dienstjahre mit meinem jetzigen Alter und erhebe dieses Product zum Quadrat, so ist die herauskommende Zahl gerade zehnmal größer als die Ackerzahl meines Reviers; multiplicire ich hingegen von letzterer den vierzigsten Theil mit dem neunzigsten Theile, so ist das Product 3,24 mal größer, als das Quadrat meines jetzigen Alters; wie alt war dieser Förster, wie groß war sein Revier und wie lange diente derselbe?

Antw. Der Förster war 30 Jahre, er diente 6 Jahre, und sein Revier hatte 3240 Acker.

§. 168.

Aufgaben über geometrische Progressionen, bei welchen höhere Gleichungen aufzulösen vorkommen.

1ste Aufgabe. Die Summe von 11 Zahlen, die in einer geometrischen Progression stehen, deren erstes Glied $= \frac{1}{8}$, ist 255,875; welche Zahlen sind dies?

Aufl. Man suche nach der 14ten Formel der bei §. 125 angeführten Tabelle, den hier unbekannten Exponenten e, so können dann mittelst desselben alle einzelnen Glieder der Progression und in ihnen die verlangten 11 Zahlen bestimmt werden. Jene Formel ist: $e^n - \frac{se}{a} + \frac{s-a}{a} = o$. Nun ist hier $n = 11$; $a = \frac{1}{8}$ und $s = 255{,}875$, jene Formel würde daher hier zu: $e^{11} - \frac{255{,}875e}{\frac{1}{8}} + \frac{255{,}872 - \frac{1}{8}}{\frac{1}{8}} = 0$ und $e^{11} - 2047e + 2046 = 0$. Hieraus folgt $e = 2$; die gesuchten 11 Zahlen sind daher: $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 und 128.

2te Aufgabe. Die Alterjahre von vier jungen Eichenbeständen stehen in einer geometrischen Progression, deren Summe $= 65$; der jüngste dieser Bestände aber ist 8 Jahr alt; wie alt ist der älteste derselben?

Aufl. Man könnte sich hier der in voriger Aufgabe gebrauchten Formel bedienen, nämlich mittelst derselben den Exponenten aufsuchen und dann die Progression von 4 Gliedern bestimmen, deren letztes Glied begreiflich die Jahre des Alters vom ältesten Bestande angeben würde; doch kann man auch die dritte Formel, nämlich $t\,(s-t)^{n-1} - a\,(s-a)^{n-1} = 0$ hierzu anwenden, in welcher t das unbekannte letzte Glied, $s = 65$, $n = 4$ und $a = 8$; demnach ist: $t\,(65-t)^3 - 8\,(65-8)^3 = 0$ oder $t^4 - 195t^3 + 12675t^2 - 274625t + 1481544 = 0$ woraus $t = 27$ Jahr folgt.

3te Aufgabe. Die Summe von 11 Zahlen, die in einer geometrischen Progression stehen, ist 31,984375, die letzte dieser Zahlen ist 0,015625; diese Zahlen sind?

Aufl. Man suche mittelst der 16ten Formel $e^n - \frac{s}{s-t}e^{n-1} + \frac{t}{s-t} = 0$ den unbekannten Exponenten e. Da hier $s = 31{,}984375$, $n = 11$ und $t = 0{,}015625$ so ist: $e^{11} - \frac{31{,}984375}{31{,}984375-0{,}015625}e^{10} + \frac{0{,}015625}{31{,}984375-0{,}015625} = 0$ und $e = 0,5 = \frac{1}{2}$; diese 11 Zahlen sind (da 0,015625 $= \frac{1}{64}$ die letzte ist; so ist $\frac{1}{64} : \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$ die vorletzte und $\frac{1}{32} : \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ und so fort) 16, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ und $\frac{1}{64}$.

4te Aufgabe. Von vier Zahlen, die in einer geometrischen Progression stehen, ist die Summe der bei den Mittleren, $24 = a$ und die Differenz der beiden Aeußeren $52 = b$; welche vier Zahlen sind dies?

Aufl. Ist das erste Glied $= x$, der Exponent $= y$, so ist die Progression: $x + xy + xy^2 + xy^3$; nun aber ist: 1) $xy + xy^2 = a$. 2) $xy^3 - x = b$. Aus der ersten Gleichung folgt: $x = \frac{a}{y+y^2} =$ dem ersten Gliede; diesen Werth für x in die zweite Gleichung gesetzt, gibt solche: $\frac{ay^2}{1+y} - \frac{a}{y+y^2} = b$ oder $24y^3 - 52y^2 - 52y - 24$

$= 0$ oder $6y^3 - 13y^2 - 13y - 6 = 0$. Hieraus folgt $y = 3$; das erste Glied ist also $= \frac{24}{3+9} = 2$, die Progression aber ist, wenn für x sein Werth gesetzt wird:

$$\frac{a}{y+y^2} + \frac{a}{1+y} + \frac{ay}{1+y} + \frac{ay^2}{1+y} \text{ oder}$$

$$2 + 2.3 + 2.3^2 + 2.3^3 \text{ nämlich}$$

$$2 + 6 + 18 + 54.$$

5te Aufgabe. Die Summe zweier Zahlen ist $80\frac{1}{8} = a$; der Quotient derselben $39_{\frac{1}{16}} = b$; man soll zwischen diese beiden Zahlen noch drei andre so einschalten, daß alle 5 Zahlen eine geometrische Progression bilden; diese Progression wird seyn?

Aufl. Setzen wir hier ebenfalls das erste Glied $= x$ und den Exponenten $= y$ so ist die Progression: $x + xy + xy^2 + xy^3 + xy^4$. Nun aber ist: 1) $x + xy^4 = 80\frac{1}{8} = 80{,}125$ oder $x + xy^4 = a$. 2) $\frac{xy^4}{x} = y^4 = 39\frac{1}{16} = 39{,}0625$ oder $y^4 = b$. Aus erster Gleichung folgt das erste Glied der Progression, nämlich: $x = \frac{80{,}125}{1+y^4}$ oder allgemein ist $x = \frac{a}{1+y^4}$. Da nun $y^4 = b = 39{,}0625$, so ist auch $x = \frac{a}{1+b} = \frac{80{,}125}{1+39{,}0625} = \frac{801250}{400625} = 2$ und $y = \sqrt[4]{b} = \sqrt{\sqrt{39{,}0625}} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$; die Progression aber ist:

$$\frac{a}{1+b} + \frac{a\sqrt[4]{b}}{1+b} + \frac{a\sqrt{b}}{1+b} + \frac{a\sqrt[4]{b^3}}{1+b} + \frac{ab}{1+b}.$$

$$2 + 5 + 12\frac{1}{2} + 31\frac{1}{4} + 78\frac{1}{8}.$$

Wäre aber n die Zahl der Glieder, so wäre die Progression

$$\frac{a}{1+b} + \frac{a\sqrt[n-1]{b}}{1+b} + \frac{a\sqrt[n-1]{b^2}}{1+b} + \frac{a\sqrt[n-1]{b^3}}{1+b} + \ldots\ldots \frac{\pm a\sqrt[n-1]{b^{n-2}}}{1+b} + \frac{ab}{1+b}$$

6te Aufgabe. Die Summe einer geometrischen Progression ist 364; das dritte Glied derselben $= 9$ und die Summe des

ersten und letzten Gliedes = 244; welche Progression ist dies?

Aufl. Den unbekannten Exponenten = v, das erste Glied = x und die Anzahl der Glieder = n gesetzt, gibt die Progression: $x + vx + v^2x + v^3x \ldots . v^{n-1}x$, deren Summe ist nach Formel 6 der angezogenen Tabelle $\frac{et-a}{e-1}$ u. hier $= v\frac{v(v^{n-1}x)-x}{v-1}$

und daher ist: 1) $\frac{xv^n-x}{v-1} = 364$. Es ist ferner: 2) $xv^2 = q$ und 3) $xv + xv^{n-1} = 244$. Die erste Gleichung wird zu: 4) $xv^n - x = 364v - 364$. Multiplicirt man die dritte Gleichung mit v und zieht solche von der vierten ab, so erhält man: 5) $120v + vx + x - 364 = 0$. Aus der 2ten Gleichung folgt: $x = \frac{9}{v^2}$; diesen Werth für x in die 5te Gleichung gesetzt, gibt: 6) $120v + \frac{9}{v} + \frac{9}{v^2} - 364 = 0$ oder $120v^3 + 9v + 9 - 364v^2 = 0$. Hieraus folgt $v = 3$, folglich $x = \frac{9}{9} = 1$; diese beiden Werthe in die vierte Gleichung gesetzt, geben 7) $3^n - 1 = 1092 - 364$ und $3^n = 729$.

Nun ist $n \log 3 = \log 729$ und $n = \frac{\log 729}{\log 3} = 6$.

Die gesuchte Progression ist also: 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243.

Eilfter Abschnitt.

Unbestimmte Analytik.

Erstes Kapitel.

Erklärungen.

§. 169.

Können aus den Bedingungen einer algebraischen Aufgabe nicht soviel Gleichungen gebildet werden, als unbekannte Größen in der Aufgabe vorkommen, so haben diese unbekannten Größen keinen bestimmten Werth (§. 60); d. h. man kann für jede derselben gewöhnlich mehr als einen Werth annehmen, der, in die Gleichung gesetzt, den Bedingungen Gnüge leistet. Solcher Werthe würden bei manchen Aufgaben sehr viele statt finden, wenn nicht die Eigenschaft derselben mehrentheils noch besonders bezeichnet würde. So könnten z. B. bei der Aufgabe: die Summe zweier Zahlen ist $= 6$, eine unzählige Menge Zahlen für die zwei unbekannten angenommen werden, wenn dieselben negativ und positiv, ganz oder gebrochen seyn dürften. Stünde dagegen noch die Bedingung, daß beide Zahlen ganz und positiv seyn müßten, so wären nur die drei Fälle denkbar, daß eine Zahl $= 1, 2, 3$, die andere aber $= 5, 4, 3$ wäre. Hierdurch vermindern sich die möglichen Auflösungen einer Aufgabe oft so, daß nur eine, oft sogar keine Auflösung statt hat.

Dieser Theil der Algebra ist unter dem Namen der unbestimmten Analytik bekannt; die Aufgaben selbst nennt man auch diophantische. *)

Anmerk. Nach Diophantus von Alexandrien so benamt, dem Verfasser des ältesten auf uns gekommenen Werkes über Algebra, das sich vorzüglich mit der unbestimmten Analytik beschäftiget, und von welchem kürzlich eine Uebersetzung von Professor Schulz, in der Schlesingerschen Buchhandlung in Berlin erschienen ist. Diophantus lebte wahrscheinlich in der Mitte des 2ten Jahrhunderts nach Christi Geburt.

§. 170.

Man kann die diophantischen Aufgaben unter folgende drei Abtheilungen bringen.

A) Es sind zwei unbekannte Größen vorhanden und nur eine Gleichung kann gebildet werden.

B) Es sind drei oder allgemein n unbekannte Größen vorhanden und zwei oder allgemein $n - 1$ Gleichung können gebildet werden.

Bei beiden können aber die unbekannten Größen nur in der ersten Potenz stehend vorkommen.

C) Es sind n unbekannte Größen vorhanden, wovon aber eine in einer höheren Potenz stehend erscheint, und nur $n - 1$ Gleichungen können gebildet werden. Eine vierte Abtheilung umfaßt die Aufgaben, in welcher 2 oder mehrere der unbekannten Größen in höheren Potenzen stehend vorkommen. Da die Auflösung derselben aber mit besonderen Schwierigkeiten verknüpft ist, und mehrere Vorbereitungen dazu erfordert werden, Fälle dieser Art aber nur höchst selten vorkommen; so ist dieselbe hier gänzlich übergangen worden. *)

Anmerk. Der Wißbegierige findet Anleitung dazu: in dem zweiten Abschnitte des zweiten Theils von Eulers vollständiger Anleitung zur Algebra.

Die unter A und B beschriebenen Aufgaben nennt man einfache, im Gegensatz von den unter C angegebenen, die zusammengesetzte diophantische Aufgaben genennt werden.

Die unter B bemerkten Aufgaben umfassen auch die sogenannte Regel Cöci.

Zweites Kapitel.

Einfache diophantische Aufgaben.

§. 171.

Hier sollen, bevor eine Auflösungsformel für gewisse Arten von diophantischen Aufgaben gegeben wird, erst die folgenden aufgelöst werden.

1ste Aufgabe. Man suche zwei ganze positive Zahlen, deren Summe $= 7$?

Aufl. Die Zahlen seyen x und y; so ist $x + y = 7$ u. $x = 7 - y$. Da nun x weder negativ noch 0 seyn soll, so kann y nicht größer als 6 angenommen werden. Setzt man nun $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, so wird $x = 6, 5, 4, 3, 2, 1$. Es fänden also 6 Auflösungen statt, wovon jedoch die 3 letzten mit den 3 ersten einerlei sind.

2te Aufgabe. Man soll 37 in zwei Theile theilen, wovon sich der eine durch 4, der andre aber durch 5 ohne Rest theilen läßt, beide Theile aber ganze positive Zahlen sind; diese Theile sind?

Aufl. Der eine Theil sey $= 4x$ und der andere $= 5y$, so ist: $4x + 5y = 37$, also $4x = 37 - 5y$ und $x = \frac{37-5y}{4}$

Hieraus sieht man, daß $5y$ kleiner als 37 seyn muß; daher kann y nicht größer als 7 seyn. Man mache die Division mit 4, so erhält man $9 - y + \frac{1-y}{4}$ Da x eine ganze Zahl seyn soll, so muß sich $1 - y$ oder auch $y - 1$ durch 4 ohne Rest theilen lassen; man setze daher $y - 1 = 4z$, also $y = 4z + 1$, so wird $x = 9 - (4z + 1) - z = 9 - 5z - 1 = 8 - 5z$. Da

nun y nicht größer als 7 seyn kann, so können für z keine andern Zahlen angenommen werden, als die $4z+1$ nicht größer als 7 geben; folglich muß $z < 2$ angenommen werden; woraus folgende Auflösungen hervorgehen. Setzt man nämlich $z = 0$ oder 1, so wird $y = 1$ oder 5. (weil $y = z + 1$) und $x = 8$ oder 3 (weil $x = 8 - 5z$). Die gesuchten Theile sind daher $(1 \times 5) + (8 \times 4) = 5$ und 32 oder $(5 \times 5) + (3 \times 4) = 25$ und 12.

3te Aufgabe. Eine mit geringem Strauchholz bewachsene Fläche von 156 Ackern soll in zwei Theile getheilt werden, wovon der eine bei 10jährigem, der andere bei 16jährigem Umtrieb auf Niederwald benutzt werden soll; wie groß wird jeder dieser Theile seyn können?

Aufl. Der eine Theil enthalte $10x$, der andre $16y$ Acker, so ist $10x + 16y = 156$ und $10x = 156 - 16y$; folglich kann y nicht größer als 9 seyn. Dividirt man erst die Gleichung mit 2 und dann mit dem Coefficienten von x, nämlich mit 5, so erhält man $x = 15 - y + \frac{3-3y}{5}$. Da x eine ganze Zahl seyn soll, so muß sich $3 - 3y$ oder $3y - 3$ durch 5 ohne Rest theilen lassen; man setze daher $3y - 3 = 15z$ also $y = \frac{15z+3}{3}$ $= 5z + 1$, so wird $x = 15 - (5z+1) + \left(\frac{3-15z-3}{5}\right)$ $= 14 - 8z$. Es kann also z nicht größer als 1 angenommen werden, weil x positiv seyn muß. Setzt man nun $z = 0$ oder 1, so wird $y = 1$ oder 6 (weil $y = 5z + 1$), und $x = 14$ oder 6 (weil $x = 14 - 8z$). Daher kann der eine Theil seyn $1 \times 16 = 16$ Acker und der andre $14 \times 10 = 140$ Acker, oder $6 \times 16 = 96$ Acker und der andre $6 \times 10 = 60$ Acker.

4te Aufgabe. Ein Forstbedienter wird beauftragt, einem Deputatisten statt 60 Klaftern $\frac{7}{4}$ ell. harter Scheite, eine Quantität weiche und harte $\frac{6}{4}$ ell. Scheite so abzugeben, daß bei letzteren derselbe Geldbetrag nach der bestehenden Taxe herauskommt, als

wie bei ersteren 60 Klaftern. Nun ist der Preiß einer harten $\frac{7}{4}$ ell. Klafter 3 Thlr. 16 gr., der einer harten $\frac{6}{4}$ ell. 3 Thlr. und der einer weichen $\frac{6}{4}$ ell. 2 Thlr. 8 gr.; wieviel Klaftern wird der Forstbediente von letzteren beiden Sorten geben können?

Aufl. Die 60 Klaftern harte $\frac{7}{4}$ ell. Scheite kosten $60 \times 3\frac{2}{3} = 220$ Thlr. Ist nun x die Klafterzahl der harten, y die der weichen $\frac{6}{4}$ ell. Scheite, so ist: $3x + 2\frac{1}{3}y = 220$ oder $7y = 660 - 9x$ und $y = \frac{660 - 9x}{7} = 94 - x + \frac{2 - 2x}{7}$

Man setze $2x - 2 = 14z$, so wird $x = \frac{14z + 2}{2} = 7z + 1$.

$y = 94 - (7z + 1) - 2z = 93 - 9z$,*) folglich kann z nicht größer als 10 angenommen werden. Es finden daher 11 Auflösungen statt; setzt man nämlich $z = 0, 1, 2, 3 \ldots$ so wird $x = 1, 8, 15, 22 \ldots$ (weil $x = 7z + 1$) und $y = 93, 84, 75, 66 \ldots$ (weil $y = 93 - 9z$). Die Werthe für x wachsen nämlich in einer arithmetischen Reihe, deren Differenz $= 7$ und die für y fallen in einer Reihe, deren Differenz $= -9$, man kann also die übrigen 7 Auflösungen sehr leicht entwickeln. Der Forstbediente könnte also 1 Klafter harte und 93 Klaftern weiche, oder 8 Klaftern harte und 84 Klaftern weiche $\frac{6}{4}$ ell. Scheite ꝛc. ꝛc. dem Deputatisten übergeben.

Anmerk. Bei der Substitution muß hier begreiflich $-2z$ gesetzt werden, weil $2x - 2$ statt $2 - 2x$, den angenommenen $14z =$ gesetzt ward.

5te Aufgabe. Von zwei Eichenbeständen ist keiner über 100 Jahr alt, die Jahre des älteren aber durch 13 getheilt, geben einen eben so großen Quotienten, als die Jahre des jüngern Bestandes durch 11 getheilt; wie alt kann jeder dieser Bestände seyn?

Aufl. Man setze $13x = 11y$; so folgt $y = \frac{13x}{11}$. Da sich nun 13 durch 11 nicht ohne Rest theilen läßt, so muß sich x durch diese Zahl theilen lassen; man setze daher $x = 11z$, so wird

$y = 13z$. Da nun weder x noch $y > 100$ seyn darf, so kann z nicht größer als 7 angenommen werden; deßhalb ist, wenn

$z = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$
$y = 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91 =$ dem Alter des einen } Bestan-
$x = 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77 =$ " " " andern } des.

§. 172.

Der Aufmerksame wird finden, daß die Auflösung dieser Aufgaben vorzüglich auf dem Verhältniß der beiden Coefficienten von x und y beruhet. Diese beiden Coefficienten, die allgemein durch a und b bezeichnet seyn sollen, müssen nun größer als die Einheit und Primzahlen unter sich seyn, wenn die Aufgaben nach dem folgenden Verfahren aufgelöst werden sollen.

Man suche nämlich, zwischen den beiden Größen a und b einer Gleichung, von der allgemeinen Form $ap = bq \pm c$, nach §. 6. den größten gemeinschaftlichen Theiler, setze dabei die nach und nach erhaltenen Reste $= m, n, r, s, t, u \ldots$, die durch die Division erhaltenen Quotienten aber $= A, B, C \ldots$, so wird, vermöge §. 6.

$$p = Aq \pm r$$
$$q = Br \pm s$$
$$r = Cs \pm t$$
$$s = Dt \pm u$$
$$t = Eu \pm v$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x = Ny \pm c$$

Der letzte Rest muß bekanntlich $= 0$ seyn, deßhalb wird, um den Werth für x zu bestimmen, von Ny, (dem Product aus dem letzten Quotienten, multiplicirt mit dem vorletzten Reste) die bekannte Größe c subtrahirt, wenn die Zahl der erhaltenen Quotienten gerade, und addirt, wenn dieselbe ungerade (1, 3, 5, 7) ist. Die Werthe von p und q werden erhalten,

wenn man rückwärts erst die Werthe von v, u, t, s und r entwickelt. Diese Entwickelung für einige besondere Fälle ausgeführt' geben:

1) $\begin{cases} q = Br - c \\ p = A\,(Br - c) + r \end{cases}$; wenn 2 Quotienten erhalten werden.

2) $\begin{cases} q = B\,(Cs + c) + s \\ p = A\,[B(Cs + c) + s] + B\,(Cs + c) + s \end{cases}$; wenn 3 Quotienten erhalten werden.

3) $\begin{cases} q = B\,[C(Dt - c) + t] + Dt - c \\ p = A\,(B[C(Dt - c) + t] + Dt - c) + B\,[C(Dt - c) + t] \\ \qquad + Dt - c \end{cases}$, wenn 4 Quotienten erhalten werden, u. s. f.

6te Aufgabe. Man suche eine Zahl, die mit 7 dividirt 3, mit 11 dividirt aber 5 zum Rest gibt; diese Zahl ist?

Aufl. Man setze $7p + 3 = 11q + 5$. Nun ist $11 : 7 = 1 + \frac{4}{7}$; also $A = 1$, $7 : 4 = 1 + \frac{3}{4}$; also $B = 1$, $4 : 3 = 1 + \frac{1}{3}$; also $C = 1$, $3 : 1 = 3$; also $D = 3$. Da hier 4 Quotienten erhalten werden; so ist nach der dritten Formel $p = 11t - 6$, und da die zu suchende Zahl $= 7p + 3$, so folgt, wenn man für p den gefundenen Werth setzt, solche $= 77t - 39$. Setzt man nun $t = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$, so ist die gesuchte Zahl $= 38, 115, 192, 269, 346 \ldots$ und so könnten noch unendlich viel Zahlen bestimmt werden, wenn man die Reihe fortsetzte, deren Glieder um 77 (den Coefficienten von t) wachsen, wenn t um eine Einheit größer wird.

7te Aufgabe. Ein Holzhändler kauft auf einem Revier eine Quantität harte und weiche Scheitklaftern, — die jedoch nicht größer als 50 ist — wovon die Klafter bei ersterer Sorte $5\frac{1}{2}$ Thlr., bei letzterer Sorte aber $2\frac{1}{4}$ Thlr. kostet; er findet bei der Bezahlung, daß die weichen Klaftern im Ganzen 41 Thlr. mehr gekostet haben als die harten; wieviel Klaftern hat er von jeder Sorte?

Aufl. Ist die Zahl der weichen Klaftern $= p$ und die der harten $= q$, so ist $2\frac{1}{2}p = 5\frac{1}{2}q + 41$ oder $5p = 11q + 82$. Nun ist: $11 : 5 = 2 + \frac{1}{5}$, also A $= 2$ und $5 : 1 = 5$, also B 5, folglich wird $q = 5r - 82$ und $p = 11r - 164$. Da nun p und q positiv ausfallen müssen, die Summe beider $(16r - 246)$ aber nicht größer als 50 seyn darf, so kann für r jede beliebige ganze Zahl, die größer als $\frac{82}{5} = 16\frac{2}{5}$ und kleiner als $\frac{246+50}{16} = 18\frac{1}{2}$ ist, gesetzt werden; es finden also nur folgende zwei Auflösungen hier statt; wird nämlich $r =$ 17 oder 18, so ist die Zahl der weichen Klaftern $p = 23$ oder 32, und die der harten $q = 3$ oder 8.

8te Aufgabe. Ein Forstbedienter hat eine gewisse Zahl Ahorne, Ulmen und Eschen zu verpflanzen, die jedoch zusammen noch nicht 100 Stück betragen; will er solche in 7 Reihen verpflanzen, so bleiben ihm 3, will er sie in 5 Reihen verpflanzen, so bleiben ihm 2, will er sie aber in 9 Reihen verpflanzen, so bleiben ihm 5 übrig; wieviel Pflanzen können es gewesen seyn?

Aufl. Man suche erst die Zahl der Pflanzen aus den beiden ersten Bedingungen zu bestimmen; diese sind: $5p + 2 = 7q + 3$ und $5p = 7q + 1$. Man erhält, bei Aufsuchung des größten Theilers zwischen 5 und 7, A $= 1$, B $= 2$, C $= 2$, daher $r = 2s + 1$, $q = 5s + 2$, und $p = 7s + 3$. Die gesuchte Pflanzenzahl wäre also in dem Falle $35s + 17$ (für p oder q seinen Werth in die Gleichung der Bedingnisse gesetzt). Man setze $35s = 35q$ und bilde mittelst der dritten, der in der Aufgabe ausgesprochenen Bedingungen die Gleichung (a) $9p + 5 = 35q + 17$ und $9p = 35q + 12$. Bei Aufsuchung des größten Theilers zwischen 35 und 9 erhält man A $= 3$, B $= 1$ und C $= 8$; daher wird $r = 8s + 12$, $q = 9s + 12$, $p = 35s + 48$. Die letzteren zwei Werthe in die Gleichung (a) gesetzt, gibt solche $315s + 437 = 315s + 437$. Da nun die Zahl der Pflanzen nicht

größer als 100 seyn darf, so finden nur folgende zwei Auflösungen statt; ist nämlich $s = 0$ oder 1, so ist die Zahl der Pflanzen $= 437$ oder 752. Es ist aber $752 : 7 = 107 + 3$ Rest, $752 : 5 = 150 + 2$ Rest, $752 : 9 = 83 + 5$ Rest.

9te Aufgabe. Ein Forstrevier, das kleiner als 1000 Ack. und zeithero auf Ausschlagewald bewirthschaftet wurde, soll in gewisse Jahresschläge, deren jeder zur Größe eine ganze Ackerzahl haben soll, getheilt werden. Theilt man nun die Ackerzahl des Reviers durch 9, so bleiben 3 Acker übrig, theilt man dieselbe durch 16, so bleiben 4 Acker, theilt man sie durch 14, so bleiben 2 Acker übrig, nur durch 15 getheilt geht die Ackerzahl gerade auf; wie groß könnte dieses Revier wohl seyn?

Aufl. Nimmt man erst die zwei mittleren Bedingungen, so folgt $14p + 2 = 16q + 4$; $7p + 1 = 89 + 2$; $7p = 8q + 1$. Man erhält, bei Auffuchung des gemeinschaftlichen Theilers $A = 1$, $B = 7$; folglich $q = 7r - 1$ und $p = 8r - 1$. Die Ackerzahl wäre demnach $= 14(8r - 1) + 2 = 112r - 12$. Dieses setze man $= 112q - 12$ und nehme die erste Bedingung, so folgt $9p + 3 = 112q - 12$; $9p = 112q - 15$ und bei Auffuchung des größten Theilers zwischen 9 und 112 folgt $A = 12$, $B = 2$, $C = 4$; folglich $r = 4s - 15$; $q = 9s - 30$; $p = 112s - 375$. Die Ackerzahl wäre demnach $= 9(112s - 375) + 3 = 1008s - 3372$. Diese Größe $= 1008q - 3372$ mit der letzten Bedingung als Gleichung angesetzt, gibt $15p = 1008q - 3372$ oder $5p = 336q - 1124$. Bei Auffuchung des größten Theilers zwischen 5 u. 336 erhielte man $A = 67$, $B = 5$, also wäre $q = 5r + 1124$; $p = 336r + 75308$; und die Ackerzahl $= 15(336r + 75308) = 5040r + 1129620$. Da die Ackerzahl nicht größer als 1000 seyn soll, so findet, wenn r positiv (selbst $= 0$) angenommen wird, keine Auflösung statt. Man nehme daher r negativ und nicht kleiner als $\frac{1129620}{5040}$ aber auch

nicht größer als $\frac{1129620+1000}{5040}$ an; setzt man nun $r = -224$, so folgt die Größe des Reviers = 660 Acker, als einzige Auflösung dieser Aufgabe. Denn es ist: $\frac{660}{15} = 44$, $\frac{660}{16} = 41 + \frac{4}{16}$, $\frac{660}{14} = 47 + \frac{2}{14}$, $\frac{660}{9} = 73 + \frac{3}{9}$.

§. 173.

(Regel-Töci.)

Können aus den Bedingungen der Aufgabe bei n unbekannten Größen nur $n-1$ Gleichungen gebildet werden, so finden oft sehr viele Werthe für die unbekannten Größen, dann aber kein einziger statt, wenn die Aufgabe widersprechende Bedingungen enthält.

Um nun aus den gebildeten Gleichungen beurtheilen zu können, ob wenigstens ein möglicher Werth statt findet, nehme man an, die beiden Gleichungen der Bedingnisse wären 1) $x + y + z = a$, 2) $x + gy + hz = b$; so müßte, wenn für x, y und z wenigstens ein möglicher Werth statt finden soll, b so zwischen den bekannten fa und ha inne liegen, daß es keiner dieser beiden Größen sehr nahe kommt.

1ste Aufgabe. Für 12 Klftrn. $\frac{5}{4}$ellige, $\frac{6}{4}$ellige und $\frac{7}{4}$ell. Scheite bezahlt man 25 Thlr., und zwar kostet die $\frac{5}{4}$ellige Klftr. $1\frac{1}{2}$ Thlr., die $\frac{6}{4}$ellige 2 Thlr. und die $\frac{7}{4}$ellige $2\frac{1}{2}$ Thlr.; wieviel Klftrn. können es von jeder Sorte gewesen seyn?

Aufl. Die Zahl der $\frac{5}{4}$ell. Klftr. sey $= x$, die Zahl der $\frac{6}{4}$ell. Klftr. sey $= y$ und die Zahl der $\frac{7}{4}$ell. Klftr. sey $= z$; so ist:
1) $x + y + z = 12$, 2) $1\frac{1}{2}x + 2y + 2\frac{1}{2}z = 25$ oder $3x + 4y + 5z = 50$. Aus der ersten Gleichung folgt $x = 12 - y - z$ und deßhalb muß $y + z$ kleiner als 12 seyn. Setzt man diesen Werth für x in die 2te Gleichung, so erhält man $36 - 3y - 3z + 4y + 5z = 50$ oder $y + 2z = 14$, also $y = 14 - 2z$; daher kann z nicht größer als 6 angenommen werden, weil $z = 7$ schon $y = 0$ gäbe. Es kann aber auch nicht kleiner als 3 angenommen werden, weil, wenn $z = 1$, $y = 12$

folglich $12 - y - z > x$; wenn aber $z = 2$, wäre $y = 10$ und $12 - y - z = 0$. Daher finden nur folgende 4 Auflösungen statt, wenn nämlich $z = 3, 4, 5$ oder 6, so ist $y = 8, 6, 4$ oder 2 (weil $y = 14 - 2z$) und $x = 1, 2, 3$ oder 4 (weil $x = 12 - y - z$).

2te Aufgabe. In einem Wirthshause verzehren 20 Personen, bestehend aus Förstern, ihren Burschen und Jagdtreibern im Ganzen 3 Thlr. 12 gr., und zwar rechnete der Wirth auf einen Förster 8 gr., auf einen Burschen 6 gr. und auf einen Treiber 3 gr. Zehrungskosten; wieviel Personen konnten von jeder Art in dem Wirthshause seyn?

Aufl. Die Zahl der Förster $= x$, die Zahl der Bursche $= y$ und die Zahl der Treiber $= z$. Da ferner 3 Thlr. 12 gr. $= 84$ gr., so ist: 1) $x + y + z = 20$, 2) $8x + 6y + 3z = 84$. Aus der ersten Gleichung folgt $x = 20 - y - z$; daher muß $y + z$ kleiner als 20 seyn. Den für x gefundenen Werth in die 2te Gleichung gesetzt, gibt: $160 - 8y - 8z + 6y + 3z = 84$ und $y = 38 - \frac{5z}{2}$. Da y eine ganze Zahl seyn muß, so muß $5z =$ durch 2 theilbar seyn; man setze daher $z = 2p$, so wird $y = 38 - 5p$ und $x = 20 - (38 - 5p) - 2p = 3p - 18$. Da nun x eine ganze positive Zahl seyn muß, so kann p nicht kleiner als 7 seyn; da ferner y von gleicher Beschaffenheit seyn muß, so kann p auch nicht größer als 7 seyn, weil sonst $5p > 38$. Es findet sich daher nur die einzige Auflösung statt, wo $p = 7$; folglich ist $z = 14$ (weil $z = 2p$), $y = 3$ (weil $y = 38 - 5p$), $x = 3$ (weil $x = 3p - 18$)

3te Aufgabe. Jemand kauft 30 Stämme, Eichen, Erlen und Kiefern für 100 Thlr. Eine Eiche kostet 6 Thlr., eine Erle 1 Thlr. und eine Kiefer 4 Thlr.; wieviel Stämme waren von jeder Gattung?

Aufl. Ist die Zahl der Eichen $= x$, die der Erlen $= y$ und die der Kiefern $= z$, so ist: 1) $x + y + z = 30$, 2) $6x + y + 4z = 100$. Aus der ersten Gleichung folgt $x = 30 - y - z$; $y + z$ kann also nicht größer als 30 seyn. Setzt man diesen Werth für x in die zweite Gleichung und reducirt solche, so folgt $y = 16 - \frac{2z}{5}$. Setzt man $z = 5p$, so wird $y = 16 - 2p$ und $x = 14 - 3p$. Es kann also p nicht größer als 4 angenommen werden. Wird nun gesetzt, $p = 1, 2, 3$ oder 4; so wird $x = 11, 8, 5$ od. 2, $y = 14, 12, 10$ oder 8 und $z = 5, 10, 15$ oder 20.

4te Aufgabe. Ein Münzmeister bedarf zu einem gewissen Behufe 36 Mark 14 löthiges Silber; nun hat derselbe zwar 16 löthiges, 12 löthiges und 9 löthiges, aber kein 14 löthiges vorräthig; wieviel Mark wird derselbe von jeder der drei angegebenen Sorten nehmen müssen, um jene 36 Mark 14 löthiges Silber zu bekommen?

Aufl. Er nehme von der 1sten Sorte x, von der 2ten y und von der 3ten z Mark, so wird 1) $x + y + z = 36$ und da die Mark der ersten Sorte 16 Loth, die der 2ten Sorte 12 Loth und die der 3ten Sorte 9 Loth, die 36 Mark aber $36 \times 14 = 504$ Loth Silber enthalten, so ist 2) $16x + 12y + 9x = 504$. Diese Gleichungen wie die der vorhergehenden Aufgaben behandelt, gibt: $x = 3p$; $y = 60 - 7p$; $z = 4p - 24$. p kann also nicht größer als 8, aber auch nicht kleiner als 7 angenommen werden; daher ist, wenn $p = 7$ oder 8, $x = 21$ oder 24, $y = 11$ oder 4 und $z = 4$ oder 8.

5te Aufgabe. Jemand kauft 76 Stück eichene, buchene, erlene und fichtene Breter für 29 Thlr. 11 gr. und bezahlt für jedes eichene Bret 20 gr., für jedes buchene 10 gr. 6 pf., für jedes erlene 7 gr. und für jedes fichtene 4 gr.; wieviel Breter kann derselbe von jeder Sorte erhalten haben?

Aufl. Da 29 Thlr. 11 gr. $=$ 707 gr., $v =$ der Zahl er eichenen, $x =$ der der buchenen, $y =$ der der erlenen, und

$z =$ der der fichtenen Bretter ist, so ist 1) $v + x + y + z = 76$ 2) $20v + 10\frac{1}{2}x + 7y + 4z = 707$ oder $40v + 21x + 14y + 8z = 1414$. Man multiplicire die erste Gleichung mit 8 und ziehe dieselbe von der zweiten ab, so erhält man nach gehöriger Reduction $y = \frac{806 - 32v - 13x}{6} = 134 - 5v - 2x + \frac{2 - 2v - x}{6}$. Man setze $2 - 2v - x = 6p$, so ist $x = 2 - 2v - 6p$ und $y = 130 + 13p - v$, folglich $z = 2v - 7p - 56$. Nun kann für v und p jede beliebige Zahl angenommen werden, die jedoch, weder x, noch y, noch z negativ oder $= 0$ gibt; da aber auch v eine ganze positive Zahl seyn muß, so kann p nur negativ genommen werden; doch muß dabei sowohl, als bei dem für v angenommenen Werth darauf gesehen werden, daß $32v + 13x$ kleiner als 806 und daß $v + x + y$ kleiner als 76 wird; setzt man nun $p = -8, -8, -9$. $v = 2, 3, 4$, so wird $x = (2 - 2v - 6p) = 46, 44, 48$; $y = (130 + 13p - v) = 24, 23, 9$; $z = (2v - 7p - 56) = 4, 6, 15$ u. s. w.

6te Aufgabe. Man soll 4 ganze positive Zahlen suchen, deren Summe $= 30$ ausmacht und die sich folgendermaßen unterscheiden. Multiplicirt man die erste mit 5, die andre mit 2, die dritte mit 3 und die vierte mit 7, so erhält man 135; dividirt man aber die erste mit 2, die andre mit 3, die dritte mit 7 und addirt zu diesen Quotienten die vierte Zahl, so erhält man 15; diese Zahlen sind?

Aufl. Den Bedingungen gemäß ist 1) $v + x + y + z = 30$. 2) $5v + 2x + 3y + 7z = 135$. 3) $\frac{v}{2} + \frac{x}{3} + \frac{y}{7} + z = 15$. Eliminirt man z, so erhält man 1) $2v + 5x + 4y = 75$. 2) $9v - 2x + 12y = 180$. Eliminirt man y und reducirt gehörig, so folgt $v = -15 + \frac{17x}{3}$.

Setzt man $x = 3p$, so ist $v = 17p - 15$ und $y = \frac{105 - 49p}{4} = 26 - 12p + \frac{1 - p}{4}$. Setzt man $1 - p = 4r$, so folgt $y = 14 + 49r$; $x = 3 - 12r$ und $v = 2 - 68r$, folglich $z = 11 + 31r$. Aus diesen Gleichungen ergibt sich, daß r nicht größer als 0 angenommen werden kann; wollte man dasselbe aber negativ, z. B. $= -1$ annehmen, so würden y und z negativ ausfallen. Es findet also nur die eine Auflösung statt, wenn $r = 0$, wo dann $v = 2$, $x = 3$, $y = 14$ und $z = 11$ wird.

Drittes Kapitel.

Zusammengesetzte diophantische Aufgaben.

§. 174.

Die Gleichung der Bedingnisse einer zusammengesetzten diophantischen Aufgabe kann unter der allgemeinen Form $a + bx + cy + dx^2 + exy + fx^3 + gx^2y + hx^4 + kx^3y + \ldots = 0$ dargestellt werden, wobei jedoch allemal die Bedingung statt finden muß, daß x und y einen Werth haben müssen, der sich durch ganze Zahlen ausdrücken läßt, damit die Gleichung mittelst des folgenden Verfahrens aufgelöst werden kann.

1ste Aufgabe. Welche zwei Zahlen geben, zu ihrem Producte addirt, 55?

Aufl. Ist die eine Zahl $= x$, die andre $= y$, so ist: $xy + x + y = 55$ u. $xy + y = 55 - x$, also $y = \frac{55 - x}{x + 1} = -1 + \frac{56}{x + 1}$

Da nun y eine ganze Zahl seyn soll, so muß 56 durch $x + 1$ ohne Rest theilbar seyn, daher muß $x + 1$ ein Theiler von 56 seyn. Die Zahl 56 aber hat folgende Theiler, 2, 4, 7, 8, 14, 28 und 56; folglich könnte,

wenn $x + 1 = 2$ gesetzt würde, $x = 1$
" $x + 1 = 4$ " " $x = 3$
" $x + 1 = 7$ " " $x = 6$ u. s. f. seyn;

Es wäre aber, wenn $x = 1$, $y = -1 + \frac{56}{2} = 27$

$= x = 2$, $y = -1 + \frac{56}{4} = 13$

$= x = 6$, $y = -1 + \frac{56}{7} = 7$ u. s. f.

Wird eine Gleichung dieser Art unter der allgemeinen Form $xy + ax + by = c$ dargestellt, so erhält man $y = \frac{c - ax}{x + b} = -a + \frac{ab + c}{x + b}$, wo stets $x + b$ ein Theiler der bekannten Größe $ab + c$ seyn muß. Man setze nun $ab + c = dh$, so wird $y = -a + \frac{dh}{x + b}$, und setze ferner $x + b = d$, folglich $x = d - b$, so wird $y = -a + h$ oder $= h - a$. So viele Theiler nun die Zahl $ab + c$ hat, deren je zwei mit einander multiplicirt dh zum Producte geben, eben soviele Auflösungen erlaubt die Aufgabe. Bei der vorstehenden allgemeinen Gleichung ist nämlich $x = d - b$ und $y = h - a$; setzt man aber $x + b =$ dem andern Theiler h, so wird $x = h - b$; $y + a$ aber $=$ dem andern Theiler d gesetzt, gibt $y = d - a$. Wäre z. B: die Gleichung $xy + 4x + 6y = 30$ gegeben; so wäre $a = 4$, $b = 6$ und $c = 30$, folglich $ab + c = 4 \times 6 + 30 = 54$; diese Zahl aber kann auf viererlei Art durch Multiplication von je zwei ihrer Theiler als dh dargestellt werden, nämlich 1×54; 2×27; 3×18; 6×9, bei welcher dann immer seyn wird $x = d - b$ oder $= h - b$ und $y = h - a$ oder $= d - a$, wie die folgende Tabelle zeigt.

Theiler oder Factoren d und h.	$d = 1$ $h = 54$	$d = 2$ $h = 27$	$d = 3$ $h = 18$	$d = 6$ $h = 9$
$x = d - b$	-5	-4	-3	0
$y = h - a$	$+50$	$+23$	$+14$	$+5$
$x = h - b$	$+48$	$+21$	$+12$	$+3$
$y = d - a$	-3	-2	-1	$+2$

2te Aufgabe. Man suche 2 Zahlen, deren Product mit 4 multiplicirt, eben so groß wird, als wenn die eine dieser Zahlen mit 3, die andre mit 2 multiplicirt und zur Summe dieser zwei Producte noch 18 addirt würde; diese Zahlen sind?

Aufl. Die eine Zahl $=$ x, die andre $=$ y gesetzt, gibt $4xy = 3x + 2y + 18$ und $y = \frac{3x+18}{4x-2}$. Vergleicht man diese Gleichung mit der, bei der vorigen Aufgabe gegebenen allgemeinen Formel, so wird man finden, daß hier eine Größe (4) vorkommt, für die in jener Formel kein Buchstabe gegeben. Setzt man die Größe, womit xy multiplicirt erscheinen kann, allgemein $= m$, so wird in jener Formel $my = a + \frac{mc+ab}{mx-b}$ oder $(my-a)(mx-b) = mc+ab$. Gibt nun die Division von $mc+ab$ durch $mx-b$ einen ganzen Quotienten, so wird auch $my-a$ durch ganze Zahlen dargestellt werden können. Drückt man nun $mc+ab$, wie bei voriger Aufgabe, durch 2 Factoren aus, die wie dort d und h seyn mögen, setzt $mx-b$ einmal $= d$ und einmal $= h$ und befreit y von seinem Coefficienten, so wird $x = \frac{d+b}{m}$ oder $= \frac{h+b}{m}$ und $y = \frac{h+a}{m}$ u. $= \frac{d+a}{m}$ folgen.

Aus diesen Formeln ergibt sich, daß wenn x und y ganze Zahlen seyn müssen, von den Factoren des $mc+ab$ nur diejenigen gebraucht werden können, die sich um b vermehrt durch m ohne Rest theilen lassen.

Da in obiger Aufgabe $m = 4$, $a = 3$, $b = 2$ und $c = 18$; so ist $mc + ab = 72 + 6 = 78$; die Theiler davon sind: 1, 2, 3, 6, 13, 26, 39 und 78. Nun ist: $(1\times78) = (2\times39) = (3\times26) = (6\times13)$. Von diesen Factoren können 2, 6, 26 und 78 gebraucht werden, weil $\frac{2+b}{4} = \frac{4}{4}$ $\frac{6+b}{4} = \frac{8}{4}$ und so fort, sich ohne Rest theilen lassen. Es finden also folgende Auflösungen statt:

Factoren. h und d.	$d = 2$ $h = 39$	$d = 6$ $h = 13$	$d = 26$ $h = 3$	$d = 78$ $h = 1$
$x = \frac{d+b}{4}$	1	2	7	20
$y = \frac{h+a}{4}$	$10\frac{1}{2}$	4	$1\frac{1}{2}$	1
$x = \frac{h+b}{4}$	$10\frac{1}{4}$	$3\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$y = \frac{d+a}{4}$	$1\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}$	$7\frac{1}{4}$	$20\frac{1}{4}$

Sollen x und y ganze Zahlen seyn, so ist, wenn $x = 2$ oder $= 20$, $y = 4$ oder $= 1$.

3te Aufgabe. Das Product zweier Zahlen zu dem Quadrate der einen Zahl addirt, gibt die Summe eben so groß, als wenn die eine Zahl mit 3, die andre mit 5 multiplicirt, zu diesen beiden Producten aber noch 17 addirt wird; diese Zahlen sind?

Aufl. Man erhält: $x^2 + xy = 3x + 5y + 17$ und $y = \frac{3x - x^2 + 17}{x - 5}$ oder $y = -x - 2 + \frac{7}{x-5}$. Es muß also, wenn x und y ganze Zahlen seyn sollen, $x - 5$ ein Theiler von 7 seyn; hätte man diesen Theiler, so wäre der Quotient begreiflich $= y + x + 2$. Nun aber hat die Zahl 7 bloß die zwei Theiler 1 und 7; wird nun $x - 5 = 1$ gesetzt, so wird $x = 6$; wird aber $x - 5 = 7$ gesetzt, so wird $x = 12$. Im ersteren Falle wäre also $y + x + 2 = y + 8$ und im zweiten Falle wäre $y + x + 2 = y + 14$. Da nun bei ersterer Annahme $x - 5 = 1$, so ist $y + 8 = \frac{7}{1}$ und $y = -1$; im zweiten Falle aber ist, da $x - 5 = 7$, $y + 14 = \frac{7}{7}$, also $y = -13$. Sollten also x und y positiv seyn, so fände unter den in der Aufgabe ausgesprochenen Bedingungen keine Auflösung statt. Würde aber 37 anstatt 17 zur Summe der beiden Producte addirt, so erhielte man $y = -x - 2 + \frac{27}{x-5}$ und da 1, 3, 9 und 27 die Theiler sind, so folgt, wenn 1) $x - 5 = 1$ gesetzt wird, der Quotient $y + x + 2 = y + 8$; folglich $y = \frac{27}{1} - 8 = 19$,

2) wenn $x - 5 = 3$ gesetzt wird, der Quotient $y + x + 2 = y + 10$; folglich $y = \frac{27}{3} - 10 = -1$ und 3) wenn $x - 5 = 9$ gesetzt wird, der Quotient $y + x + 2 = y + 16$; folglich $y = \frac{27}{9} - 16 = -13$ u. s. w.; es fände also hier eine Auflösung statt, nach welcher $x = 6$ und $y = 19$. Auch für diese Aufgabe erhält man folgende allgemeine Formel. Setzt man nämlich $y + x - a + b = \frac{c + a - b^2}{x - b}$ und die Größe $c + a - b^2 = dh$; so kann $x - b$, da es ein Factor von $c + a - b^2 = dh$ seyn muß, ebenfalls einmal $= d$, also $x = d + b$, folglich $y = h - d - 2b + a$, und einmal $= h$, also $x = h + b$, folglich $y = d - h - 2b + a$ gesetzt werden. (Mittelst dieser allgemeinen Formel ist die folgende Aufgabe gelöst).

4te Aufgabe. Als man einen Förster nach dem Alter zweier junger Buchenbestände fragte, erwiederte derselbe: ihr Alter mit einander multiplicirt und zu dem Quadrate des einen addirt, gibt eben soviel Jahre, als wenn ich das Alter des einen mit 7, daß des andern mit 9 multiplicire und zu der Summe dieser zwei Producte 66 addire; wie alt konnte jeder dieser Bestände seyn?

Aufl. Den Bedingungen gemäß ist $xy + x^2 = 7x + 9y + 66$. Da nun hier $a = 7$, $b = 9$ und $c = 66$, folglich $c - b^2 + ab = 66 - 81 + 63 = 48$, von 48 aber die Theiler 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 und 48 sind; so fänden, weil x und y positiv seyn müssen, von den in der Tabelle stehenden nur folgende 3 Auflösungen statt.

Factoren d und h.	d=1 h=48	d=2 h=24	d=3 h=16	d=4 h=12	d=6 h=8	d=12 h=4	d=16 h=3	d=24 h=2	d=1 h=48
x=d+b	10.	11.	12.						
y=h—d—2b+a	36.	11.	2.	.	.	.	.	.	.
x=h+b							12.	11.	36.
y=d—h—2b+a	.	.	.	.	.	.	2.	11.	10.

5te Aufgabe. Multiplicirt man das Product zweier ganzen positiven Zahlen x und y mit $2 = m$; das Quadrat der einen dieser Zahlen mit $3 = n$ und addiret diese Producte, so erhält man in dieser Summe eben soviel, als wenn man die eine Zahl

mit $7 = a$, die andre mit $5 = b$ multiplicirt und zu der Summe dieser 2 Producte noch $323 = c$ addirt; diese Zahlen sind? Aufl. Es ist, allgemein dargestellt, $mxy + nx^2 = ax + by + c$ und $y = \frac{ax+c-nx^2}{mx-b}$ $= -\frac{nx}{m} + \frac{am-bn}{m^2} + \frac{cm^2+abm-b^2n}{m^3x-m^2b}$ oder $m^2y + mnx - am + bn = \frac{cm^2+abm-b^2n}{mx-b}$. Setzen wir $cm^2 + abm - b^2n = dh$, so muß, weil sich diese Größe durch $mx - b$ ohne Rest theilen lassen muß, $mx - b = d$ oder $= h$, x also $= \frac{d+b}{m}$ oder $= \frac{h+b}{m}$ seyn; folglich würde $y = \frac{h-n(d+2b)+am}{m^2}$ oder $y = \frac{d-n(h+2b)+am}{m^2}$ seyn. Da nun hier $a = 7$, $b = 5$, $m = 2$, $n = 3$, so ist $cm^2 + abn - b^2n = 1287$. Hiervon sind die Factoren 1, 3, 9, 11, 13, 33, 39, 99, 117, 143, 429 und 1287. Von diesen Factoren dürfen aber nur diejenigen genommen werden, wo, wenn $b = 5$ dazu addirt wird, sich diese Summe durch $m = 2$ ohne Rest theilen läßt. Diese Eigenschaft haben aber alle, es fänden daher die, in nachstehender Tabelle enthaltenen 24 Auflösungen statt.

Factoren d und h	$d=1$ $h=1287$	$d=3$ $h=429$	$d=9$ $h=143$	$d=11$ $h=117$	$d=13$ $h=99$	$d=33$ $h=39$	$d=39$ $h=33$	$d=99$ $h=13$	$d=117$ $h=11$	$d=143$ $h=9$	$d=429$ $h=3$	$d=1287$ $h=1$
$x = \frac{d+b}{m}$	3.	4.	7.	8.	9.	19.	22.	52.	61.	74.	217.	646
$y = \frac{h-n(d+2b)+am}{m^2}$	317.	101.	25.	17.	11.	−19.	−25.	−75.	−89.	−109.	−325.	−969.
$x = \frac{h+b}{m}$	646.	217.	74.	61.	52.	22.	19.	9.	8.	7.	4.	3.
$y = \frac{d-n(h+2b)+am}{m^2}$	−969.	−325.	−109.	−89.	−75.	−25.	−19.	11.	17.	25.	101.	317.

Da die ersten 6 Auflösungen der ersten Spalte = den letzten sechs der zweiten Spalte sind, so finden nur 12 Auflösungen statt, da aber beide Zahlen auch positiv seyn sollen, so sind nur 5 Auflösungen möglich.

6te Aufgabe. Subtrahirt man von dem $3 = m$fachen Producte zweier ganzer Zahlen x und y, das $2 = n$fache Quadrat der kleineren Zahl x, so ist der Unterschied eben so groß, als wenn die kleinere Zahl mit $3 = a$, die größere aber mit $10 = b$ multiplicirt und ersteres Product von letzteren abgezogen wird; diese Zahlen sind?

Aufl. Es ist, den Bedingungen zufolge $3xy - 2x^2 = 10y - 3x$ oder allgemein $mxy - nx^2 = by - ax$ und

$$y = \frac{nx^2 - ax}{mx - b} = \frac{nx}{m} + \frac{nb - am}{m^2} + \frac{nb^2 - abm}{m^3 x - m^2 b},$$ also

$$m^2 y - mnx - nb + am = \frac{nb^2 - abm}{mx - b}.$$ Man setze

$$\frac{nb^2 - abm}{mx - b} = \frac{dh}{m},$$ so wird $x = \frac{d + b}{m}$ oder $= \frac{h + b}{m}$

$$\text{also } y = \frac{h + n(d + 2b) - am}{m^2} \text{ oder } y = \frac{d + n(h + 2b) - am}{m^2}.$$

Bei den oben angegebenen Werthen wird $nb^2 - amb = 110$, davon sind die Factoren 1, 2, 5, 10, 22, 55 und 110. Davon gehen nur die, wo sich $d + b$ durch m ohne Rest theilen läßt, nämlich 2, 5 und 110. Es finden daher nur folgende, in der nachstehenden Tabelle angegebenen Auflösungen statt.

Factoren d und h.	$d = 2$ $h = 55$	$d = 5$ $h = 22$	$d = 110$ $h = 1$
$x = \frac{d + b}{m}$	4.	5.	40.
$y = \frac{h + n(d + 2b) - am}{m^2}$	10.	7.	28.
$x = \frac{h + b}{m}$	$\frac{65}{3}$.	$\frac{32}{3}$.	$\frac{11}{3}$.
$y = \frac{d + n(h + 2b) - am}{m}$	$\frac{143}{9}$.	$\frac{80}{9}$.	$\frac{143}{9}$

Den Bedingungen gemäß sind also nur die in der ersten Spalte enthaltenen drei Auflösungen möglich, wo nämlich, wenn $x = 4$ oder 5 oder 40, $y = 10$ oder 7, oder 28.

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Pernitzsch, Heinrich Gottlob

Die Arithmetik und Algebra in aufgelösten und mit Erklärungen versehenen Aufgaben ; Zum Selbstunterricht insbesondere für angehende Forstmänner

Leipzig 1823

Math.p. 740 w
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083294-8